J IV 23

Ma.
o
5

Bip

Moter
1773.

Entwurf
einer
Arithmetik Geometrie
und
Trigonometrie

von

M. Ludwig Alexander Krebs
des Gies. ill. akad. Päd. Coll.

mit Kupfern.

Giesen,
bei Johann Philipp Krieger. 1768.

Dem
Reichs frei Hochwohlgebohrnen
Herrn
Herrn
Hermann Riedesel
Freiherrn zu Eisenbach
Sr. Hochfürstl. Durchl. des regierenden Herrn Landgrafen zu Hessen Darmstatt Hochbetrauten Staats Minister und wirklichen Geheimen Rath, der Hochfürstl. Universität zu Giesen
Curator ꝛc. ꝛc.

Meinem gnädigen Herrn

Reichs frei Hochwohlgebohrner
Herr,

Gnädiger Herr,

Daß sich unsere Musen öfters vor Ew. Reichsfreiherrlichen Excellence, ihren grösten Mäcen, wagen: dazu gibt ihnen die Gröse und die Hoheit des Geistes, welche sie ehrfurchtsvoll an **Denenselben** bewundern; und die gnädige Zuneigung, die sie frolokend verehren, gleichsam ein eigenes Recht. Aber daß ich mich unterstehe diese unbeträchtliche Arbeit **Ew. Reichsfreiherrlichen Excellence** zu weihen und

und unterthänig vor **Dero** selbst in das geheime der Wissenschaften schauende Augen zu legen: hierzu finde ich nirgends die geringste Gründen einiger Entschuldigung, als in **Dero** hohen Gnade, die in einem ganzen Lande glänzet, es beseeligt und auch hoffentlich diesem geringen Entwurf gnädig entgegen blikken wird. Hierauf freue ich mich um desto zuversichtlicher, ie gnädiger **Ew. Reichsfreiherrlichen Excellence** auch selbst auf das allergeringste herab zu sehen pflegen, wenn es nur die Bildung eines Genies zum Nuzzen des Staats und der Kirche zum Gegenstand hat. Diese wenigen Blätter hatte ich auf der Bahn nötig, darauf ich von **Dero** hohen und unverdienten Gnade unterstüzt getretten. Sie sind die ersten öffentlichen Früchten meiner Bemühungen auf derselben. Wohin solte ich daher wol eher mit denselben, einem Pfand meiner Dankbarkeit, als vor **Ew. Reichsfreiherrlichen Excellence** eilen? Meine unterthänige Dankbegierde öffentlich zu bezeugen, ware die Triebfeder der Entschliesung gegenwärtigen mathematischen Entwurf in dem Schmuk **Dero** hohen und unsterblichen **Nahmens** erscheinen zu lassen.

sen. Und sie wird stets den brünstigen Wunsch zum Unendlichen für das hohe Wohl **Ew. Reichsfreiherrlichen Excellence**, worunter die Wissenschaften so glüklich blühen, in mir entzünden. Sie wird mich stets anfeuren **Dero** hohen Gnade, der vorzüglichsten Aufmunterin in allen meinen Geschäften, unterthänig empfohlen zu bleiben; und mir der stärkste Antrieb zur Behauptung der Freiheit werden, mich ohnablässig in tiefer Ehrfurcht nennen zu können

Reichs frei Hochwohlgebohrner Herr,

Gnädiger Herr,

Ew. Reichsfreiherrl. Excellence

Giesen
den 25ten März
1768.

unterthänigen

Ludwig Alexander Krebs.

Vorrede.

Selbst bei dem Uiberfluß mathematischer Anweisungen von verdienstvollen Männer mangelte doch denen, deren Bildung in schönen und höheren Wissenschaften ich mir zur Pflicht gemacht, ein Leitfaden ihrer Gedanken und eine Unterstüzzung ihres Fleißes. Diesen seien die gegenwärtigen wenigen Blätter bestimmet. Das erste Gesez empfahle mir hier Deutlichkeit. Ein anderes, alle Kostbarkeit aufs äuserste zu vermeiden, legten mir nothwendige Umständen auf. Ich weiß, daß man mir vorrükken wird, ich hätte das leztere zum Nachtheil des ersteren, sonderlich bei

bei den Kupfern befolget. Aber ich weiß auch, daß bei einem mathematischen Entwurf, den ein mündlicher Unterricht begleiten soll, die Kürze ohnschädlich ist, und daß hierbei die selbst vorgezeichnete Figuren und verfertigte Körpern den besten Eindruck machen. Wird man mir sonst eine eingeschliechene Schwachheit, dafür sich kein Sterblicher iemals gänzlich sichert, in reiner Absicht zeigen: so werden dagegen keine andere Regungen als des Dankes und der Erkentlichkeit in mir aufsteigen. Hingegen bei andern Urtheilen, deren man zu unsern Tagen so viele höret, werde ich das Glük haben volkommen gleichgültig zu bleiben. Mein Ziel ist schon erreicht, wenn ich durch diese geringe Arbeit einen und den andern zur Entwiklung seines Verstandes und auf den blühenden und fast ganz unentbehrlichen Weg zur angewendeten Mathematik leiten werde.

Einleitung.

§. 1.

Die Mathematik ist eine Wissenschaft von den zu messenden Grösen der Dingen.

§. 2.

Der Inbegriff mehrerer Einheiten von einerlei Art macht eine Gröse aus. Jene ähnliche einzele Dinge sind die Theilen derselben. Sie selbst ist das Ganze.

§. 3.

Hat iene Wissenschaft nur die allgemeine Betrachtung der Grösen zum Gegenstand: so erhält sie den Nahmen der reinen Mathematik. Benuzzet sie diese allgemeine Untersuchungen bei besonderen Grösen in der Natur: so nennen wir sie die unreine oder angewendete Mathesis.

§. 4.

Schon die ganz allgemeine Untersuchung der Grösen entdekket, daß einige ohne Ausdehnung; andere hingegen nicht ohne dieselbe gedacht wer-

den können. Diese nennet man stetige, ausgedehnte. Jene unstetige, unausgedehnte. Wird nun nicht die reine Mathematik mit beiden zu schaffen haben? (§. 3.)

§. 5.

Wenn die reine Mathesis nur die Natur und Eigenschaften der unausgedehnten Grösen, welche man Zahlen nent, entdekket: so lieffert sie uns die Arithmetik. Ist sie mit den ausgedehnten beschäftiget: so heist sie die Geometrie. Lehrt sie uns aus einigen vermittelst der Geometrie gegebenen Stükken eines Triangels, durch die Arithmetik die übrige finden: so bringt sie uns die Trigonometrie bei. Die wichtige Algebra und die mit ihr verbundenen Stükken verschweigen wir allhier.

§. 6.

In der Arithmetik finden sich Gründe, auf welche man bauen muß. Solten diese nicht den ersten Plaz einnehmen? Ist es nicht billig sogleich nach denenselben, von der schiklichsten Bezeichnung der Zahlen zu reden? Darauf von ihren inneren Veränderungen? Endlich sie in ihrer äuseren Beschaffenheit als relativische Grösen darzustellen? So wird die Arithmetik in vier Abschnitten zerfallen.

§. 7.

Bei den ausgedehnten Grösen, damit sich die Geometrie beschäftigt, denken wir uns den Punkt

als

als etwas ganz einfaches. Er zeugt durch seine Bewegung die Linie. Diese die Fläche Und von den Flächen stammen die mathematischen Körpern ab. Die deutliche Erkentnis der Linien und Flächen wird daher wol den Anfang in der Geometrie machen müssen. Die Einsicht in ihre Gleichheit ist überaus wichtig. Und eben so beträchtlich ist die Lehre von der Aehnlichkeit derselben. Nach diesem Unterricht wird sie ihr Maaß an Linien, Flächen und Körpern legen, oder die Longimetrie und Altimetrie, die Planimetrie, die Stereometrie auszuüben zeigen müssen. Die Longimetrie und Altimetrie soll ienen drei ersten speculativischen Betrachtungen Geselschaft leisten, um sie an Vergnügen desto reicher zu machen. Die Planimetrie aber wird mit Recht den vierten Plaz; die Stereometrie den lezten behaupten.

§. 8.

In der Trigonometrie wollen wir erstlich die nötige Gründe legen, darauf die Berechnungen der Triangeln vornehmen, und endlich noch die gegebene Vorschriften auf einige besondere Fälle anwenden.

Der Arithmetik

Erster Abschnitt.

Von den Gründen derselben.

§. 1.

Erkl. Gleiche Grösen sind, deren eine so viel von eben denselben Einheiten enthält als die andere; und die in so fern für einander gesezt werden können. Dieienige ist gröser, welche mehr dergleichen Einheiten; dieienige kleiner, welche weniger in sich begreift. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.

§. 2.

Grds. Wenn nun eine Gröse nicht eben dieselbe bleiben soll, so muß die Menge ihrer Einheiten entweder vermehret oder vermindert werden.

§. 3.

Zus. Alle mögliche innere Veränderungen einer Gröse werden daher in Vermehrung und Verminderung derselben bestehen.

§. 4.

Grds. Muß nicht auch eine Gröse oder ein Ganzes sich selbst; und allen seinen Theilen zusammen genommen gleich; aber gröser als einige derselben sein?

§. 5.

Grds. Vermehren wir gleiche Grösen mit gleichen, so können gewis dadurch nur gleiche Grösen entstehen. Solten aber eine grösere und kleinere mit gleichen vermehret werden: so mus durch die erste Vermehrung, eine grösere; durch die andere, eine kleinere Quantität herausgebracht werden.

§. 6.

Grds. Werden wir nicht aus eben dem Grunde gleiche Grösen empfangen, wenn wir gleiche um gleiche vermindern? Wir müssen hingegen, wenn wir von einer gröseren uud kleineren gleiche wegnehmen, im ersten Fall eine grösere; im andern eine kleinere Gröse erhalten.

§. 7.

Grds. Wird eine Gröse mit gleichem vermehrt und wieder vermindert, so mus sie sich vor und nach geschehener Veränderung gleich sein.

§. 8.

Grds. Die Quantität, welche gröser ist, als eine von zwei gleichen, mus auch gröser als die andere von diesen beiden sein.

§. 9.

Grds. Ist eine iede von zwei Grösen einer dritten gleich: so müssen sie nothwendig einander selbst gleich sein.

Zweiter Abschnitt.

Von Bezeichnung der Zahlen.

§. 10.

Grds. Die Zahlen bestehen aus Einheiten. (§. 5. 2. Einl.)

§. 11.

Grds. Gewiß kan man eine Einheit gröser annehmen, eine andere kleiner.

§. 12.

Wilk. S. Man erwähle sich um grose Zahlen bequem auszudrukken, Einheiten von steigenden Klassen, deren eine immerhin zehenmal mehr enthält als die andere, so, daß zehen Einheiten in einer Klasse, nur eine in der folgenden ausmachen.

§. 13.

Anm. Sowol die Zeichen, welche uns die Anzahl der Einheiten in einer ieden Klasse bestimmen, als auch solche, welche die Einheiten der einen Klasse von den Einheiten der andern unterscheiden, werden auf diese Art unentbehrlich sein. Für beide Arten von Zeichen, welche wir Ziffern oder Figuren nennen, sind überdas schikliche Ausdrükke nötig.

§. 14.

Wilk. S. Zur Bezeichnung einer ieden Einheit, erwähle man den Nahmen, eine und das Zeichen 1. 1 vermehrt mit 1, nenne man zwei, und nehme das Zeichen 2. 2 vermehrt mit 1, heise

heise man drei, das Zeichen seie 3. 3 und 1, vier, 4. 4 und 1, fünf, 5. 5 und 1, sechs, 6. 6 und 1, sieben, 7. 7 und 1, acht, 8. 8 und 1, neun, 9. Mehr Nahmen und Zeichen hat man für die blose Einheiten nicht nötig.

§. 15.

Wilk. S. Um aber auch zu erkennen, zu welcher Klasse (§. 12.) diese bezeichnete Einheiten (§. 14.) gehören: so eigne man den Einheiten der ersten Klasse den Nahmen der Einer zu; den Einheiten der zweiten den Nahmen: Zehner; der dritten: Hunderter; der vierten: Tausender; der fünften aufs neue: Zehner, u. s. f.

§. 16.

Wilk. S. Ein Einer heise eins, zwei Einer, zwei, u. s. f. Ein Zehner heise zehen; zwei Zehner zwanzig; drei Zehner, dreisig, u. s. f. Ein Hunderter, ein hundert, u. s. f. Ein Tausender, ein tausend, u. s. f.

§. 17.

Zus. Wer sieht nicht, daß auf diese Art ein Zehner zehen Einer enthält? Ein Hunderter, hundert Einer? Ein Tausender, tausend Einer? u. s. f. (§. 15. 12.)

§. 18.

Wilk. S. Ein tausendmal tausend wollen wir eine Million nennen. Tausendmal tausend Millionen, eine Billion. Tausendmal tausend Billionen, eine Trillion, u. s. f.

§. 19.

Wilk. S. Die Zeichen der verschiedenen Klassen seien folgende: Die Einer schreibe man in die erste Klasse zur Rechten, die Zehner in die zweite, die Hunderter in die dritte, die Tausender in die vierte, Zehentausend in die fünfte, Hunderttausend in die sechste, Millionen in die siebende, zehen Millionen in die achte, u. s. f.

§. 20.

Wilk. S. Der Ort einer Zahl ist nun überaus wichtig. Wir wollen deswegen, um nicht bei leeren Klassen zu irren, dieselbe mit einer Nulle, o, erfüllen.

§. 21.

Aufg. Wie werden wir nun eine gegebene Zahl aussprechen?

Auflösung.

1) Mache man von der Rechten zur Linken iedesmal nach drey Figuren einen Punkt. Nach dem letzten Punkte können drei oder weniger stehen.

2) Bezeichne man die nächste Ziffer zur Linken am zweiten Punkte mit einem Strichlein, am vierten mit zwei, am sechsten mit drey, u. s. f.

3) Spreche man ein Strichlein durch Million aus, zwei durch Billion, drei durch Trillion, u. s. f. Einen Punkt nenne man tausend. Die erste an demselben zur Rechten stehende Figur, hundert; die andere, zehen oder zwanzig, u. s. f. (§. 16.) die lezte, eins, zwei, u. s. f. (§. 16.)

4. Ver-

4) Vergesse man nicht den Einheiten in ieder Klasse ihren gehörigen Nahmen beizulegen. (§. 14.) z. B.

1.212''. 567.896'. 345.678. sind ein tausend zwei hundert und zwölf Billionen, fünf hundert sieben und sechzig tausend acht hundert sechs und neunzig Millionen, drei hundert fünf und vierzig tausend sechs hundert acht und siebenzig.

Der Beweis flieset ganz augenscheinlich aus den §§. 19. 18. 14.

Dritter Abschnitt.

Von den Veränderungen der Zahlen.

§. 22.

Grds. Eine iede Zahl ist eine Gröse. (§. 5. Einl.)

§. 23.

Zus. Müssen also nicht alle innere Veränderungen der Zahlen in Vermehrung und Verminderung derselben zu sezzen sein? (§. 3.)

24.

Grds. Wenn wir eine Zahl vermehren, so sezzen wir entweder ungleiche zu derselben, oder ihr gleiche. Dieses leztere geschiehet, wenn wir eine und eben dieselbe Zahl mehrmalen nehmen. (§. 1.)

§. 25.

Grds. Vermindern wir eine Zahl, so neh-

men wir entweder eine und eben dieselbe so oft als es nur möglich von derselben weg; oder nur eine, wie auch verschiedene ein und etlichemal.

§. 26.

Zus. Es sind daher nur vier Arten eine Zahl zu verändern. (§. 23.) Diese Veränderungen werden Species der Arithmetik genennet.

§. 27.

Anm. Die erste und andere Art dieser Veränderungen (§. 24.) geschiehet durch das addiren und multipliciren, die dritte und vierte (§. 25.) durch das dividiren und subtrahiren.

§. 28.

Erkl. Wenn wir eine Zahl finden, welche verschiedenen gegebenen gleich ist, so addiren wir. Die gefundene Zahl heist die Summe; die gegebenen, die summirenden.

§. 29.

Zus. Weil die Summe Einheiten von einerlei Art enthalten muß: (§. 22. und 2. Einl.) so dörffen gewis die summirende Zahlen nur von einerlei Art sein. (§. 28.)

§. 30.

Aufg. Wie addiren wir nun mehrere Zahlen?

Auflösung.

Man ordne 1) die summirende Zahlen klassenmäsig unter einander, d. i. man sezze alle Einer in die erste Reihe zur Rechten, alle Zehner in die zweite, u. s. f.

2) Zäh-

2) Zähle man alle Einer, Zehner, u.s.f. zusammen, und schreibe Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, u.s.f.

3) Wie vielmal man zehen Einer zählet, so oftmal sezze man einen Zehner zu den Zehner in die zweite Reihe; und wie vielmal man zehen Zehner antrift, so vielmal schreibe man einen Hunderter, zu den Hundertern in die dritte Reihe, u.s.f. z.E.

478 93 7 — 578	Man denke: 7 und 3 sind 10 und 8 dazu sind 18. Hier sind einmal zehen Einer, und überdas noch 8. Also schreibe man 8 unter die Einer, und zu den Zehner in der zweiten Reihe zähle man die zehen Einer, d.i. einen Zehner.

Man fähret fort: 1 (Zehner) im Sinne, und 9 sind 10 und 7 dazu sind 17. 7 Zehner schreibe man unter die Zehner, die übrige zehen machen einen Hunderter aus. Man sage also: 4 und 1 (Hunderter) im Sinne, sind 5, und schreibe sie in ihre gehörige Reihe.

Beweis.

Nicht nur alle Einer, Zehner, u.s.f. welche die summirende Zahlen schon wirklich enthalten, sondern auch die Zehner, Hunderter, u.s.f. welche durch die Zusammenzählung aller Einer, Zehner, u.s.f. entstanden, liegen in der Summe. Sie enthält also alle Einheiten der summiren-

renden Zahlen (§. 15. 17.) und muß also denselben zusammen genommen gleich sein. (§. 1. 28.)

§. 31.

Anm. Die bequemste Versicherung von unserer regelmäsig verrichteten Arbeit, gibt uns die Wiederholung derselben, und die Versezzung der Zahlen an Hand. Sind aber der summirenden Zahlen nur zwei gewesen: so muß die eine heraus kommen, wenn wir die andere von der Summe wegnehmen.

§. 32.

Anm. Hat man bestimte oder genante Zahlen, so zählet man, wie vorhin, zuerst die Einheiten von kleinerer Art zusammen, und wie oftmal so viel von denselben, als zu einer Einheit gröserer Art erfodert werden, gezählet worden, eben so oftmal zählt man eine Einheit zu denen von gröserer Art.

§. 33.

Anm. Die Addition bezeichnet man mit †. Und dieses Zeichen bedeutet wenn es zwischen Zahlen, z. B. 8 † 9, stehet, die Summe derselben, 17. Man drükt es also aus: 8 mehr 9.

§. 34.

Erkl. Eine Zahl, 8, um eine andere, 6, vermindern heiset die Einheiten dieser, 6, von den Einheiten iener, 8, wegnehmen. Diese, 6, ist der Subtrahendus, iene, 8, der Minuendus.

§. 35.

Erkl. Subtrahiren ist nichts anders, als eine Zahl finden, welche mit dem Subtrahendo zusammen genommen dem Minuendo gleichet. Die Zahl welche gefunden wird, heist das Residuum, die Differenz oder der Unterscheid der

bei=

beiden gegebenen. Weil das Zeichen der Subtraction — ist, welches wir durch weniger aussprechen, so wird die Differenz 2, von 8 und 6 geschrieben: 8 — 6.

§. 36.

Zus. Die Differenz enthält Einheiten des Minuendi und macht mit dem Subtrahendo eine Zahl aus. (§. 35.) Diese muß aus Zahlen von einerlei Art bestehen (§. 22. und 2. Einl.) In der Subtraction werden also nothwendig ähnliche Zahlen erfodert.

§. 37.

Aufg. **Wie wird nun eine kleinere Zahl von einer gröseren subtrahirt?**

Auflösung.

Man ordne 1) die Zahlen klassenmäsig. (§. 19.)

2) Nehme man alle Einer, Zehner, u. s. f. des Subtrahendi von den Einer, Zehner, u. s. f. des Minuendi weg, und schreibe die übrigen Einer, Zehner, u. s. f. klassenmäsig auf.

3) Wenn sich in einer Klasse mehr Einheiten des Subtrahendi als des Minuendi finden: so beraube man im Minuendo die Ziffer der zur Linken folgenden Reihe um eins und gebe es in die vorhergehende Reihe zur Rechten zurük, wo es zehen vorstellt und nun mit der schon hier stehenden Figur verbunden werden muß.

4) Folgen in dem Minuendo mehrere Nullen

len auf einander: so gehe man zur Linken fort bis zur einer Zahl und entwende ihr eins. Dieses gibt in der nächst vorhergehenden Reihe zur Rechten zehen. Hiervon nehme man wieder eins, daß nur 9 bleiben, und beschenke damit die weiter vorhergehende zur Rechten, darin man 10 hat. Ist noch eine Nulle oder kleinere Zahl übrig: so gibt man wieder eins ab. Und so werden alle Nullen 9 gelten, auser die lezte zur Rechten, welche 10 vorstelt, wenn von ihr nichts wieder abgegeben wird. Z. E.

2.0.0.14	Man denke: 2 von 4 bleiben 2. Diese schreibe man in die Klasse der Einer.
1 2 4 5 2	Nun gehe man zu den Zehner fort
7562	und denke: 5 von 1 kan ich nicht

(subtrahiren.) Es muß also eins geborget werden, und zwar bei 2. Dieses geliehene 1, ist bei der ersten Null zur Linken nicht mehr als 9, weil man schon wieder eins der andern Null abgeben muß. Bei dieser bleiben ebenfals nur 9. Dann es wird wieder eins an 1 verschenket, welches nun 11 ausmachet. Nun fahren wir fort: 5 von 11 bleiben 6. 4 von 9 bleiben 5. 2 von 9 bleiben 7. 1 von 1. gehet auf.

Beweis.

Die zu vermindernde Zahl muß eben so viel Einheiten enthalten als ihr sollen entwendet werden, und ihr noch nach geschehener Beraubung übrig bleiben. (§. 34.) Hat man aber nicht

durch

durch die gegebene Vorschriften alle Einheiten, welche ihr nach geschehener Beraubung übrig geblieben in die Differenz gebracht? und sind ihr nicht eben so viel Einheiten entwendet worden, als der Subtrahendus enthält? Die gefundene Differenz also und der Subtrahendus müssen zusammen genommen dem Minuendo gleich sein. (§. 1.) Und eben das ware es, was die Subtraction von uns foderte. (§. 35.)

§. 38.

Anm. Findet sich der dritte und vierte Fall dieser Auflösung bei bestimten Zahlen: so lässet man die entwendete Einheit so viel in der vorhergehenden Reihe zur Rechten gelten, als wie viel kleinere Einheiten die grösere in sich fasset.

§. 39.

Anm. Die Probe unserer richtigen Subtraction machen wir, wenn wir die Differenz und den Subtrahendum addiren, und gewahr werden, daß die Summe dem Minuendo gleichet. (§. 35.)

§. 40.

Erkl. Eine Zahl erfinden, welche einer von zwei gegebenen, so vielmal als die andere Einer enthält genommen, gleich ist, heist multipliciren. Die Zahl, welche mehrmalen genommen wird, heist der Multiplicandus; die andere, welche sagt, wie vielmal iene soll genommen werden, der Multiplicator. Beide, Factores oder Efficientes. Die gefundene, das Product oder Factum.

§. 41.

Zus. Weil eine Zahl so vielmal muß in der Multiplication genommen werden, als die andere Einer enthält: (§. 40.) so ists einerlei, welche von den Factoribus zum Multiplicatori erwählet wird.

§. 42.

Anm. Das Pythagorische Täflein oder Einmaleins, in welchem die Produkte aller einzelen Zahlen vorkommen, ist sowol beim multipliciren als dividiren unentbehrlich Es verdient daher mit volkommener Fertigkeit gefasset zu werden.

§. 43.

Aufg. Eine Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

1) Schreibe man die Zahlen klassenmäsig auf. (§. 19.)

2) Nehme man, wenn der Multiplicator einfach ist, erstlich alle Einer, darauf alle Zehner, Hunderter, u. s. f. des Multiplicandi, so oft als Einer in dem Multiplicatore sind, und schreibe sie iedesmal mit in Achtnehmung der dritten Vorschrift bei der Addition klassenmäsig auf.

Ist aber 3) der Multiplicator zusammengesezt, so nehme man erstlich alle Einer, Zehner, Hunderter, u. s. f. des Multiplicandi, so oft als Einer in dem Multiplicatore sind, und fange mit dem Produkt unter den Einer anzuschreiben. Darauf nehme man wieder alle Einer, Zehner, u. s. f. des Multiplicandi, so oft als Zehner im Multiplicatore

tore

tore enthalten, und fange das Product unter den Zehner in der zweiten Reihe an zu schreiben. Dieses wiederhole man bei den Hundertern, Tausendern, u. s. f. des Multiplicatoris.

4) Sind Nullen am Ende der Factorum, so hänge man sie alle an das Product und multipliciere nur mit den übrigen Figuren.

5) Endlich wenn mehrere Produkte sind, so werden sie addiret. Die Summe lieffert das ganze Produkt. Z. E.

```
 256
  23
----
 768
512
----
5888
```

Man spreche: 3 mal 6 ist 18. 8 werden unter die Einer gesezzet. Ein Zehner bleibt im Sinne. Weiter: 3 mal 5 (Zehner) ist 15 und 1 im Sinne sind 16. 6 komt unter die Zehner. Ein Hunderter im Sinne. Ferner: 3 mal 2 ist 6 und 1 im Sinne sind 7. Diese 7 kommen unter die Hunderter. Nun fange man an mit den Zehner zu multipliciren: 2 mal 6 ist 12. (Zehner) 2 werden unter die Zehner in die zweite Reihe geschrieben. Ein Hunderter im Sinne. 2 mal 5 ist 10 und 1 im Sinne sind 11. (Hunderter) 1 schreibet man unter die Hunderter. Ein Tausender bleibt im Sinne. 2 mal 2 ist 4 (Tausender) und 1 im Sinne sind 5. Diese kommen in die Reihe der Tausender; und nun werden beide Produkte addiret.

Beweis.

Es sind nach den gegebenen Vorschriften alle

Einheiten des Multiplicandi, also auch der ganze Multiplicandus (§. 4.) so oftmal in das ganze Produkt gebracht worden, als der Multiplicator Einer, Zehner, Hunderter, u. s. f. hat, und also auch Einer enthält. (§. 17.) Weil es nun gleichviel ist, welchen man von denen Factoribus zum Multiplicatori macht: (§. 41.) so muß hierdurch das Product eben so viel Einheiten erhalten als der eine Factor so vielmal, wie Einer in dem andern Factore sind, genommen, haben würde. Und eben dieses ist das Kennzeichen der Multiplication. (§. 40. 1.)

§. 44.

Zus. Was wird gewisser hieraus folgen, als daß einerlei Zahlen auf mancherlei Weise durch einander multipliciret einerlei Produkt zeugen müssen? (§. 1. 41.)

§. 45.

Anm. Das Zeichen der Multiplication ist ein Punkt , . , oder auch, x, zwischen den zu vervielfältigenden Grösen: daß also das Produkt, 32, aus den Zahlen, 8 und 4, geschrieben wird 8 . 4, oder 8 x 4.

§. 46.

Erkl. Wenn wir eine Zahl, 8, vermittelst einer andern, 2, in Theilen zergliedern: so ist diese der Divisor, iene der Dividendus.

§. 47.

Erkl. Eine Zahl aus zwei gegebenen finden, welche so viel Einer enthält, als der Divisor kan vom Dividendo subtrahiret werden; und also auch iener in diesem enthalten ist, heist dividiren

ren. Die gefundene Zahl wird ihrer Natur gemäs, der Quotient genennet. Das Zeichen der Division ist, :, oder ein Querlienlein, —, zwischen beiden Grösen. Man schreibt demnach den Quotient 4, aus 8 und 2 also, 8 : 2 oder $\frac{8}{2}$

§. 48.

Zus. Weil zwei gleiche Grösen weder mehr noch weniger als einmal in einander enthalten sind, oder von einander können abgezogen werden: so wird nothwendig der Quotient 1 sein müssen, wenn sie durch einander dividiret werden.

§. 49.

Zus. Weil der Divisor so vielmal als der Quotient Einer hat, in dem Dividendo enthalten ist, und es also ausmacht: so muß das Product des Divisoris und Quotienten dem Dividendo gleich sein; (§. 40.) und demnach dividiren nichts anders sein, als aus dem Dividendo und Divisore eine Zahl erfinden, deren und des Divisoris Produkt dem Dividendo gleichet.

§. 50.

Zus. Der Divisor und Quotient sind also die zwei Factores von dem Dividendo als ein Produkt betrachtet.

§. 51.

Aufg. Wie verrichten wir die Division?

Auflösung.

I. Wenn der Divisor einfach ist, so erwäge man 1) Wie oft er in der ersten Figur des Dividendi zur Linken enthalten seie, oder wenn diese

kleiner als der Divisor wäre, wie oft er in den zwei ersteren liege; und schreibe die dieses bedeutende Figur hinter einen Strich zur Rechten, als die Stelle des Quotienten.

2) Multiplicire man mit diesem Quotienten den Divisorem, und ziehe das Produkt von der oder denen dividirten Figuren des Dividendi ab. Das übrig bleibende schreibe man entweder über besagte Figuren, welche alsdenn ausgestrichen werden, oder unter dieselben nach §. 37. und sezze die übrige Ziffern des Dividendi zur Rechten in diesem Fall daran.

3) Nun gehet man mit dem Divisore weiter fort gegen die Rechte und wiederholet das vorgeschriebene Geschäfte bis man zum Ende komt.

II. Haben wir einen zusammen gesezten Divisorem, so prüfe man, wie oft er in eben so viel Ziffern des Dividendi oder einer mehr (n. 1.) enthalten seie, welches man mit Gewisheit erfähret, wenn man mit dem vermittelst der ersten Figur des Divisoris muthmaslich angenommenen Quotienten den ganzen Divisorem multiplicirt und das Produkt von den vorgenommenen Figuren des Dividendi abziehen kan, daß entweder nichts oder doch weniger übrig bleibet als der Divisor gros ist. Nun fähret man nach n. 2. und 3. fort. Z. E.

1(1 53 | $26\frac{1}{2}$ 22 |	Hier denke man: 2 in 5 habe ich 2 mal, und schreibe 2 in in die Stelle des Quotienten. Mit ihm multipli-

tiplicire man den Divisorem 2, und ziehe das Produkt 4 von 5 ab. Den Rest 1 sezze man über die ausgestrichene 5. Nun wird der Divisor fortgerükket, und man denke: 2 in 13 habe ich 6 mal. 6 schreibt man zu 2 und spricht 6 mal 2 ist 12. 12 von 13 bleibt 1: welches man nun hinter dem Quotienten über den Divisorem also schreibet $\frac{1}{2}$, daß man sehe, 1 solle noch mit 2 dividiret werden.

Oder:

```
23) 1863 (81
     16
      24
    ------
     184
    ------
       23
       23
     ------
        0
```

Hier sage man: 2 in 18 habe ich 8 mal, sezze 8 hinter den Strich. 8 mal 2 ist 16. Diese schreibe man unter die 18. Weiter: 8 mal 3 ist 24. Diese sezze man unter die 86 des Dividendi. Die Summe beider Produkten 184 ziehe man von dem vorgenommenen Theile des Dividendi 186 ab, so bleibt 2 übrig. An diese 2 schreibe man den übrigen Theil des Dividendi 3 herab; und sage: 2 in 2 habe ich 1 mal. 1 wird zum schon gefundenen Quotienten 8 gesezzet. 1 mal 2 ist 2, und 1 mal 3 ist 3. 23 von 23 gehet auf.

Beweis.

Es ist ganz einerlei, ob man alle Theilen von zwei Ganzen einander nach und nach gleich macht oder die Ganzen selbst. (§. 4.) Nun sind die Produkten eines jeden gefundenen Quotienten

und dem Divisore, allen Theilen des Dividendi nach und nach also gleich gemacht worden, daß nach dem beständigen abziehen nichts mehr übrig geblieben. Das ganze Produkt aus dem Quotienten und Divisore muß also dem Dividendo gleich sein, (§. 4.) welches eben die Division erfodert. (§. 49.)

§. 52.

Anm. Die Probe unseres richtigen Verfahrens bei der Multiplication reichet uns die Division des Produkts mit einem Factore, in welcher wir den andern Factorem als einen Quotienten erhalten. (§. 49.) Wenn wir nach geschehener Division den Quotienten mit dem Divisore multipliciren, und das Produkt dem Dividendo gleichet: so sind wir auch hier unserer Sache gewis. (§. 49.)

Weil die Multiplication eine wiederholte Addition; (§. 40. 24.) die Division eine solche Subtraction: (§. 25.) so kan man noch aus dem obigen (§. 29. 36.) folgern, daß Zahlen von einerlei Art sowol bei der Multiplication als Division unentbehrlich seien.

§. 53.

Grds. Was von allen Grösen wahr ist, das muß gewis auch von den Zahlen wahr sein. (§. 5. Einl.)

§. 54.

Zus. Wenn nun gleiche Zahlen zu gleichen addiret; wenn gleiche mit gleichen multipliciret werden: so müssen im ersten Fall die Summen gleich sein, im andern die Produkte. u. s. f. §. 5. (24. 27.)

§. 55.

Zus. Aus eben diesem Grunde müssen sowol die

Quo-

Quotienten als Unterschiede gleich sein, wenn gleiche Zahlen mit gleichen dividiret und subtrahiret werden. u. s. f. §. 6. (§. 25. 27.)

§. 56.

Grds. Solte man nicht eine iede Einheit in Gedanken in so viel gleiche Theilen, als man will, zergliedern können?

§. 57.

Erkl. Stellen wir uns einen oder mehrere solcher gleichen Theilen einer zergliederten Einheit vor, so haben wir einen Bruch; und zwar einen wahren, reinen, wenn er weniger Theile enthält als die ganze Einheit von uns ist eingetheilt worden, einen falschen, unreinen, wenn er eben so viel oder mehrere in sich begreift.

§. 58.

Wilk. S. Damit man es dem Bruch ansehe, in wie viel gleiche Theilen die Einheit zergliedert worden, und wie viel er von diesen Theilen vorstelle: so kan man die Zahl, die uns das erste sagt, unter ein Querstrichlein, und die, welche uns das andere entdekket, darüber schreiben. Z. E. $\frac{4}{8}$. Jene unter dem Strichlein, nent man den Nenner, diese über demselben, den Zähler.

§. 59.

Zus. Ist der Zähler dem Nenner gleich, so stellet der falsche Bruch die ganze Einheit oder 1 vor. (§. 57. 4.) Ist der Zähler gröser, so enthält auch der Bruch mehr als 1. (§. 1.)

§. 60.

Zus. Multipliciren wir eine Zahl, 4, mit einer

ner andern, 2, so ist diese Zahl, 2, in dem Produkt, 8, so oft als die andere Einer hat, hier 4 mal enthalten. (§. 40.) Nehmen wir nun das Produkt, 8, zum Zähler eines Bruches und den Multiplicatorem, 2, zum Nenner als $\frac{8}{2}$ an: so wird gewis der Nenner, 2, dem Zähler, 8, so oftmal als der Multiplicandus Einer hatte, hier 4 mal gleich sein. Daher wird der ganze Bruch 4 Einheiten oder dem Multiplicando, 4, gleich sein.

§. 61.

Zus. Hieraus begreifet man, wie eine Zahl, 3, in einen gleichgeltenden Bruch verwandelt werde: wenn wir sie mit einer Zahl, 2, multipliciren, und eben diesen Multiplicatorem zum Nenner des Produkts, 6, erwählen: $\frac{6}{2}$.

§. 62.

Lehrs. Ein Bruch ist von dem durch den Nenner dividirten Zähler in der Sache selbst nicht verschieden.

Beweis.

1) Bei einem falschen Bruch, dessen Nenner ein oder etlichemal genommen, dem Zähler vollkommen gleich ist, erhellet die Wahrheit dieses Sazzes aus §. 59. 48. 47.

2) Wenn ein reiner Bruch, z. E. $\frac{3}{5} = 3:5$, sein soll, so müssen wir sehen, wie oft der Nenner im Zähler enthalten seie. (§. 47.) Er ists nicht nach allen seinen 5 Theilen, Einer; sondern nur nach so vielen derselben als solcher Theilen, Einer, der

Zäh-

Zähler enthält, hier 3 dieser Fünftheilen. Also ist der Quotient $3 : 5 = \frac{3}{5}$.

3) Die noch übrige Gattung von falschen Brüchen besteht aus ienen, n. 1. und diesen, n. 2. Wir dörffen also auch nicht zweiflen, daß $\frac{7}{3} = 7 : 3$ sein müsse.

§. 63.

Zus. Wie gros ein unächter Bruch seie, sagt uns also der Quotient, wenn wir mit dem Nenner den Zähler dividiren. Z. E. $\frac{8}{2} = 8 : 2$ also $= 4$.

§. 64.

Lehrs. Um wie viel 1) der Nenner eines Bruches gröser wird, um eben so viel wird der Bruch selbst verkleinert. Und 2) um wie viel der Zähler zunimt, um eben so viel wird der Bruch vergrösert werden.

Beweis.

1) Unser Bruch soll einen Theil enthalten oder der Zähler 1 sein und bleiben. Man zergliedere nun die Einheit z. E. eine Linie in zwei gleiche Theilen ----|---- : so ist der Bruch $\frac{1}{2}$. Man zergliedere sie auch in noch einmal so viel, nemlich in 4 Theile --|--|--|-- : so ist der Bruch $\frac{1}{4}$ und der Nenner noch einmal so gros worden. Aber ist er im ersten Fall, da er die Helfte der Linie ausmachte, nicht noch einmal so gros als im lezten, da er nur den vierten Theil dieser Linie enthält? Wer sieht also nicht die Wahrheit des ersteren?

2) Der unveränderte Nenner 4 soll die Linie in 4 gleichen Theilen zergliedert vorstellen. Man nehme zum Zähler 1, so hat man $\frac{1}{4}$ oder einen Theil der zergliederten Linie. Man nehme noch einmal, d. i. 2 mal so viel zum Zähler, so hat man 2 Theilen, $\frac{2}{4}$. Man nehme 3 mal so viel, so hat man 3 Theilen, $\frac{3}{4}$, u. s. f. Also wird der Bruch um eben so viel vermehrt als der Zähler zunimt. (§. 58.)

§. 65.

Zus. Um wie viel demnach der Nenner kleiner wird, um eben so viel wird der Bruch vergrösert. Und um wie viel der Zähler vermindert wird, um so viel nimt der Bruch selbst ab.

§. 66.

Zus. Ein kleiner Nenner und groser Zähler macht also einen grosen Bruch; ein groser Nenner und kleiner Zähler, einen kleinen.

§. 67.

Zus. Je mehrmalen nun der Nenner im Zähler enthalten ist, (§. 62.) desto gröser wird der Bruch sein; ie weniger er in ihn stekket, desto kleiner. Ist also der Nenner von mehreren Brüchen gleich vielmal im Zähler enthalten, oder der Quotient (§. 62.) gleich: so müssen sich auch die Brüchen vollkommen gleichen.

§. 68.

Lehrs. Wenn man einen Bruch, d. i. dessen Zähler und Nenner, mit einer Zahl mulmultiplicirt, so ist der gefundene Bruch dem vorigen gleich.

Be-

Beweis.

Der Bruch stelt noch eine Gröse vor. (56. 2. Einl.) Wir vermehren und vermindern ihn mit gleichem, wenn wir seinen Zähler und Nenner mit einer und eben derselben Zahl multipliciren. (§. 64.) Wird also nicht der lezte Bruch dem ersten gleich sein? (§. 7.) Z. E.

$$\frac{2\ (.2)}{5\ (.2)} = \frac{4}{10}$$

§. 69.

Zus. Auf gleiche Art fliešet aus dem §. 65, daß, wenn wir den Zähler und Nenner eines Bruchs mit einer Zahl dividiren, der gefundene Bruch ienem gleichen müsse. Z. E.

$$\frac{12\ (:4)}{20\ (:4)} = \frac{3}{5}$$

§. 70.

Erkl. Einen Bruch aufheben, heist aus ihm einen andern ihm zwar gleichen, aber mit kleineren Zahlen bezeichneten Bruch finden.

§. 71.

Aufg. Wie werden wir die Aufhebung eines Bruches verrichten?

Auflösung und Beweis.

Man dividire sowol den Zähler als Nenner mit einer Zahl die beide vollkommen theilet, und nehme den Quotient vom Zähler, zum neuen Zäh-

Zähler; vom Nenner, zum neuen Nenner an. (§. 69.) Z. E.

$$\frac{16:8}{40:8} = \frac{2}{5}$$

§. 72.

Anm. Wie beschwerlich würde es sein, auf einem langweiligen Wege mit kleinen Zahlen einen sehr grosen Bruch aufzuheben? Man dividire nur, dieses zu vermeiden, mit dem Zähler den Nenner. Was hier übrig bleibt, mache man wieder zum Divisore des gewesenen, u. s. f. bis einmal alles aufgehet. Der hierbei gebrauchte Divisor wird den Bruch, so weit es möglich ist, aufheben.

§. 73.

Aufg. Mehrere Brüche unter einerlei Benennung zu bringen?

Auflösung.

Haben wir 1) nur zwei Brüchen: so multiplicire man eines ieden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern. Z. E.

$$\frac{1}{4} \text{ und } \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} \text{ und } \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} \text{ und } \frac{8}{12}$$

2) Sind aber mehrere Brüchen vorhanden, so wird wie vorhin ieder Bruch mit dem Produkt aus allen übrigen Nennern multipliciret. Z. E.

$$\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4} = \frac{2\ .8}{3\ .8}\ \frac{1\ .12}{2\ .12}\ \frac{3\ .6}{4\ .6} = \frac{16}{24}\ \frac{12}{24}\ \frac{18}{24}$$

Beweis.

Alle Nenner müssen gleich werden, weil stets

bei ihnen alle Nenner Factores bleiben. (§. 44.) Und aus dem §. 68. fliesset augenscheinlich, daß die leztere Brüche noch eben dieselbe sind, welche sie vor der Multiplication waren.

§. 74.

Erkl. Ein Bruch ist ein oder mehrere Theilen von einer zergliederten Einheit. (§. 57.) Was wird daher Brüche addiren anders bedeuten, als alle gegebene Theilen dieser Einheit zusammen nehmen? (§. 28.) So müssen auch Brüche von einander subtrahiret werden, wenn wir einen oder mehrere Theilen von andern eben derselben Einheit wegnehmen. (§. 35.)

§. 75.

Aufg. Wie werden nun Brüche addiret?

Auflösung und Beweis.

Man bringe sie 1) wenn sie nicht einerlei Nenner haben, nach §. 73. unter einerlei Benennung. (§. 29.)

2) Nehme man die Summe aller Zählern, zum neuen Zähler ihres einmal genommenen Nenners. (§. 74.) Z. B.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{12}{20} + \frac{10}{20} = \frac{22}{20}$$

§. 76.

Aufg. Wie sollen wir Brüche subtrahiren?

Auflösung und Beweis.

Man suche 1) einerlei Benennung nach §. 73. (§. 36.)

2) Neh-

2) Nehme man die Differenz der Zähler zum neuen Zähler des unveränderten Nenners an. (§. 74.) Z. B.

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{5} = \frac{25}{30} - \frac{12}{30} = \frac{13}{30}$$

§. 77.

Zus. Sollen wir einen Bruch, $\frac{3}{4}$, von einer ganzen Zahl, 12, abziehen: so bringen wir zuvor die ganze Zahl in einen gleichgeltenden Bruch, der die Benennung des abzuziehenden Bruches hat, (§. 61. 36.) und subtrahiren nun diesen von ienem nach §. 76.

§. 78.

Aufg. Brüche mit Brüchen zu multipliciren.

Auflösung.

Hier darff man nur das Produkt beider Zählern zum neuen Zähler, das Produkt beider Nennern zum neuen Nenner nehmen. Z. E.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Beweis.

Der Nenner ist nur der blose Nahme von den Theilen, die ein Bruch enthält. (§. 58.) Die Multiplication muß also mit dem Zähler geschehen. Wenn wir nun den Zähler 2 mit dem Zähler des Multiplicatoris 4 multipliciren: so ist der

Bruch

Bruch $\frac{8}{3}$; aber gewis so vielmal zu gros, als der Nenner des Multiplicatoris Einer enthält, weil dessen Zähler zuvor hätte sollen mit seinem Nenner dividirt werden, (§. 62.) hier also 5 mal. Der Bruch $\frac{8}{3}$ muß derowegen wieder eben so vielmal, 5 mal, vermindert werden. (§. 7.) Geschiehet das nicht, wenn sein Nenner mit dem Nenner des Multiplicatoris, hier 5, multiplicirt wird? (§. 64.)

§. 79.

Zus. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn wir ihn so vielmal, als dieselbe Einer enthält, nehmen, oder so vielmal vergrößern. (§. 40.) Das thun wir aber, wenn wir nur den Zähler mit der gegebenen Zahl multipliciren und den Nenner unverändert beibehalten. (§. 64. n. 2.) Eben so wird auch die ganze Zahl mit dem Bruch multiplicirt. (§. 41.)

§. 80.

Zus. Multipliciren wir nun einen Bruch mit seinem Nenner: so wird er so viele ganze Einheiten ausmachen als der Zähler enthält. (§. 60.)

§. 81.

Aufg. Wie haben wir Brüche mit Brüchen zu dividiren?

Man kehre den Divisorem um, und multiplicire nach §. 78. Z. E.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$$

Be-

Beweis.

Hier hat man den Dividendum $\frac{2}{3}$ mit dem Zähler des Divisoris 3 zu dividiren. Also muß mit diesem der Nenner des Dividendi multipliciret werden, (§. 64. n. 1.) daß der Bruch $\frac{2}{9}$ entstehet. Ist er aber nicht so vielmal zu klein, als der Nenner des Divisoris, 5, gros ist; weil mit diesem der Zähler 3 zuvor hätte dividiret werden sollen? (§. 62) Jener Bruch muß also wieder mit dem Nenner des Divisoris vervielfältiget oder der Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris, 5, multipliciret werden. (§. 64. n. 2.) So muß man also nun 1) den Nenner des Dividendi mit dem Zähler des Divisoris 2) den Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris multipliciren. Und das geschiehet am füglichsten nach vorheriger Herumdrehung des Divisoris.

§. 82.

Zus. Wir werden nun eine ganze Zahl mit einem Bruch dividiren, wenn wir den Zähler des umgekehrten Bruches mit der ganzen Zahl multipliciren, und das Produkt zum neuen Zähler des durch die Umkehrung empfangenen Nenners annehmen. Dann iede ganze Zahl kan als der Zähler des Nenners 1 angesehen werden. (§. 63.)

Z. E.

$$6 : \frac{2}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ (§. 63.)}$$

§. 83.

Anm. Sollen wir einen Bruch mit einer ganzen

Zahl

Zahl dividiren: so können wir nur den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciren oder auch mit ihr den Zähler dividiren. (§. 64. 65.)

§. 84.

Anm. Wollen wir Brüche und ganze Zahlen mit ganzen und gebrochenen Zahlen multipliciren oder auch dividiren, so bringen wir zuvor die ganze Zahlen mit ihren gebrochenen in gleichgeltende Brüche (§. 61.) und verfahren nach den vorhergehenden Vorschriften.

§. 85.

Zus. Wenn zwei gleiche Brüchen durch einander dividiret werden, so müssen Zähler und Nenner in dem Quotient gleich sein. (§. 48. 59.) Sind nun nicht in zwei gleichen Brüchen die beiden Produkte aus dem Zähler des erstern und Nenner des andern, aus dem Nenner des ersten und Zähler des andern einander gleich? (§. 81.)

§. 86.

Erkl. Multipliciren wir eine Zahl, z. E. 3, mit sich selbst, so nennen wir das Produkt, 9, ihre Quadrat-Zahl oder ihr Quadrat, □; aber die mit sich selbst multiplicirte Zahl, 3, die Quadrat-Wurzel.

§. 87.

Erkl. Wenn wir aufs neue das Quadrat, 9, mit der Quadrat-Wurzel multipliciren, so heist das Produkt, 27, die Cubic-Zahl oder der Cubus; und in Ansehung dessen die gewesene Quadrat-Wurzel, 3, nun die Cubic-Wurzel.

§. 88.

Zus. Wir entdekken demnach in einer gegebenen Zahl, 16, die Quadrat-Wurzel, wenn

wir eine Zahl, 4, erfinden, welche mit sich selbst multiplicirt die gegebene, 16, ausmacht. Und werden wir nicht die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl, 64, ziehen, wenn wir eine Zahl, 4, erfinden, welche mit ihrem Quadrat, 16, multiplicirt, die gegebene, 64, lieffert?

§. 89.

Anm. Zu dieser Erfindung muß uns dieses Täflein führen, darin die Quadraten und Cubi aller einzelen Zahlen enthalten sind:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 90.

Aufg. Wie sollen wir nun aus einer gegebenen Zahl, die nicht in diesem Täflein enthalten ist, die Quadrat-Wurzel ausziehen?

Auflösung.

Man zergliedere 1) die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken, so in Klassen, daß jede zwei Ziffern enthalte. Die lezte kan auch eine haben.

2) Nehme man seine Zuflucht zu ienem Täfelgen und suche sich darin das Quadrat aus, welches der Zahl in der ersten Klasse gleichet, oder wenn dieses, wie oft geschehen wird, nicht selbst darin enthalten, das nächst kleinere. Dessen Wurzel schreibe man gleich einem Quotienten auf; es selbst aber unter besagte Klasse und ziehe es von derselben ab. (§. 37.)

3) An

3) An das übrig gebliebene, oder wo es doch, wenn auch nichts übrig bleibt, stehen solte, schreibe man zur Rechten die folgende Klasse herab.

4) Nehme man den ganzen zur Seite geschriebenen Quotienten 2 mal; sezze ihn unter die erste Ziffer der eben herab geschriebenen Klasse zur Linken; und dividire durch ihn sowol die gerad über ihm stehende als zur Linken übrige Zahlen. Den neuen Quotienten sezze man zur Rechten an den schon gefundenen; aber auch unter die lezte Figur dieser vorgenommenen Klasse zur Rechten; und multiplicire mit ihm, ihn selbst und die neben ihm zur Linken stehende Ziffern.

5) Dieses Produkt ziehe man von dem über dessen Factoribus stehenden Theil der gegebenen Zahl ab. Nun befolge man aufs neue, bis das Ende erreichet wird, die 3te und 4te Vorschrift: so werden die gefundene Quotienten die Quadrat-Wurzel ausmachen. Z. E.

```
1|41|61    (119
1:  :
——  :
0|41:              Probe:   119
 21:                        119
 ——|                       ————
 20|61                     1071
  2|29                     119
     9                    119
 ——————                   —————
 20 61                    14161
 ——————
    0
```

§. 91.

Aufg. Wie ziehen wir die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl?

Auflösung.

1) Zergliedere man die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, deren iede, auser der Lezten zur Linken, 3 Ziffern enthalten muß.

2) Nehme man den Cubum in dem Täfelgen, (§. 89.) welcher der ersten Klasse zur Linken gleichet; oder den nächst kleineren. Dessen Wurzel wird als ein Quotient aufgeschrieben; aber selbst der Cubus von dieser ersten Klasse abgezogen.

3) An das übrige schreibe man die folgende Klasse der gegebenen Zahl.

4) Das dreimal genommene Quadrat des ganzen gefundenen Quotienten schreibe man als einen Divisorem also, daß (von der Linken an gezählt) dessen lezte Ziffer unter der ersten der herab geschriebenen Klasse stehe. Mit demselben dividire man nun die über ihm stehende Zahlen (n. 4. §. 90.) und sezze den Quotienten an den vorigen. Darauf nehme man

5) Das Produkt aus dem neuen Quotienten und seinem Divisore, und schreibe es unter den Divisorem, daß sich dessen lezte Figur unter der ersten der vorgenommenen Klasse befinde. So fange man auch unter der mitleren Ziffer dieser Klasse gegen die Linke anzuschreiben, das Produkt aus dem dreimal genommenen Quadrat des

neuen

neuen Quotienten und dem ganzen vorigen. Auf gleiche Art unter der lezten Ziffer, den Cubum des neuen Quotienten.

6) Diese drei Produkte werden addiret, und die Summe von den über denselben stehenden Ziffern der gegebenen Zahl abgezogen. Die num. 3. 4. 5. 6. werden bis zum Ende wiederholet. Und die gefundene Quotienten lieffern uns die gesuchte Cubic-Wurzel. Z. E.

	15	625	(25
	8:		
	7	625	
Divisor.	1	2	
Prod. aus dem Div. und neuen Quotient.	6	0	
Prod. aus dem dreifachen □ des neuen Quot. und dem ganz. vorig.	1	50	
Cubus des neuen Quotient.		125	
	7	625	
		0	

§. 92.

Anm. Wenn wir die gefundene Cubic-Wurzel mit ihrem Quadrat multipliciren, und was übrig geblieben dazu addiren; und diese Summe der gegebenen Zahl gleich ist: so haben wir eine Probe unseres richtigen Verfahrens. (§. 87.)

§. 93.

Anm. Nicht selten wird es uns begegnen, daß ob wir gleich unser §. 90. und 91. vorgeschriebenes Geschäfte aufs genaueste durch alle Klassen der gegebenen

Zahl fortgesezt, daß dem ohngeacht noch etwas übrig bleibet. Hieran merken wir, daß die gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat oder Cubus ist. In diesem Fall haben wir die Erlaubnis dem übrig gebliebenen von der Quadrat-Zahl zwei Nullen, von der Cubic-Zahl, drei anzuhängen; und unsere Verrichtung bei iener von n. 4. und 5. §. 90; bei dieser von n. 4. 5. 6. §. 91. zu wiederholen. Die Wurzel wird auf diese Art in 10. Theilgen erscheinen, d. i. der entdekte neue Quotient wird ein Zähler des Nenners 10 sein. Hängen wir noch einmal an die Qadrat-Zahl 2, an die Cubic-Zahl 3 Nullen: so kommen in den Wurzeln 100 Theilgen heraus. u. s. f.

Vierter Abschnitt.

Von den Verhältnissen.

§. 94.

Erkl. Wir bemerken ein Verhältnis (rationem) wenn wir gewahr werden, wie sich eine Gröse, 3, von einer andern, 6, abziehen lässet. Bedienen wir uns hierzu der Subtraction und richten unser Augenmerk auf die Differenz, 3: so ist es ein arithmetisches, und wird geschrieben 6 — 3. Erwählen wir die Division, und sehen auf den Quotienten, 2: so wird das Verhältnis ein geometrisches genennet und geschrieben 6 : 3. Der Quotient, 2, welcher zeigt, wie vielmal eine Zahl, 3, können von der andern, 6, weggenommen werden, heist der Exponent in dem Verhältnis; (exponens rationis) die beide Zahlen 6 und 3, die Glieder desselben.

§. 95.

Zus. In dem geometrischen Verhältnis muß also zur Entdekkung des Exponenten das Vorderglied durch das Hinterglied dividirt werden. Ist nun dieses gröser als ienes: so ist das Verhältnis durchaus nicht in der Sache selbst von einem reinen Bruch unterschieden. (§. 57. 62.) Wenn das Hinterglied kleiner als das Vorderglied, oder auch eben so gros ist: so kan das Verhältnis einen unreinen Bruch ohne alle Gefahr zu irren vorstellen. (§. 57. 62.)

§. 96.

Zus. Wenn daher ein geometrisches Verhältnis mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt wird: so muß das gefundene Verhältnis dem vorigen gleich sein. (§. 68. 69.)

§. 97.

Zus. Hieraus flieset auch, daß wenn man zwei Zahlen mit einer dritten multiplicirt oder dividirt, die Produkten und die Quotienten in eben dem geometrischen Verhältnis stehen, in welchem iene Zahlen waren.

§. 98.

Erkl. Die Gleichheit in zwei geometrischen Verhältnissen erfodert gleiche Exponenten; (§. 95. 67.) in arithmetischen, gleiche Differenz: u. wird im ersten Fall eine geometrische, im andern eine arithmetische Proportion (analogia) genennet. Jene schreibt man am füglichsten 6 : 3 = 8 : 4. (§. 47.) Diese, 6 – 3 = 5 – 2. (§. 35.) Beide spricht man aus: Wie sich verhält das erste

Glied, oder 6, zum andern, oder zu 3: so verhält sich auch das dritte zum vierten.

§. 99.

Erkl. Beide Proportionen nennet man stetige, (continuae) wenn eine Zahl die beiden mitleren Glieder vorstellet. Im Gegentheil unstetige. (discretae) Eine stetige geometrische wird geschrieben $\div\!\!\div$ 2 . 4 . 8, oder $2:4 = 4:8$; eine solche arithmetische $\div$ 2 . 6 . 10, oder auch $2 - 6 = 6 - 10$.

§. 100.

Zus. Sind nun zwei Verhältnissen einer dritten gleich: so müssen sie sich selbst gleich sein; (§. 9.) und also eine Proportion ausmachen. (§. 98.) Z. E. $5 : 15 = 1 : 3$ ingleichen $4 : 12 = 1 : 3$ also auch $5 : 15 = 4 : 12$.

§. 101.

Lehrs. In einer ieden geometrischen Proportion ist das Produkt aus dem ersten und vierten, d. i. äuseren Glieder, dem Produkt aus den mitleren gleich. Z. E.

$$\begin{array}{ccccc} 6 & : & 2 & = & 9 : 3 \\ 3 & & & & 2 \\ \hline 18 & & & & 18 \end{array} \qquad \text{oder} \quad \frac{6}{2} : \frac{9}{3} = \frac{6}{2} \cdot \frac{3}{9} = \frac{18}{18}$$

Beweis.

In zwei gleichen Brüchen, welche eine geometrische Proportion vorstellen, (§. 94. 95. 98.) ist das Produkt aus dem Zähler des ersten und Nen-

Nenner des andern, gleich dem Produkt aus dem Nenner des ersten und Zähler des andern. (§. 85.) Jenes komt aus den äuseren; dieses aus den mitleren Glieder, wenn wir die Brüche in eine Proportion sezzen. Was kan uns nun antreiben an diesem Lehrsaz zu zweiflen?

Uiberdas flieset noch ein anderer Beweis aus §. 44. und §. 89.

§. 102.

Zus. Wird nun nicht in einer stetigen geometrischen Proportion das Quadrat des mitleren Gliedes, dem Produkt der beiden äuseren gleich sein? (§. 99. 86.)

§. 103.

Zus. Jener Lehrsaz (§. 101.) muß auch umgekehrt wahr sein: weil von der Gleichheit beider Produkten auf gleiche Brüche; (§. 81. 48. 59.) und von diesen auf die Gleichheit iener Verhältnissen, (§. 67. 95. 98.) oder eine geometrische Proportion (§. 98.) mit unumstöslicher Gewisheit geschlossen wird. Wenn wir nun wahrnehmen, daß die Produkte aus den mitleren und äuseren Glieder gleich sind: so wissen wir, daß wir eine geometrische Analogie vor uns haben.

§. 104.

Zus. So lange demnach die gleichnahmichte Glieder, d. i. die beiden mitleren und äuseren, gleichnahmicht bleiben, wird bei ieder Veränderung der Glieder eine geometrische Proportion bleiben müssen.

§. 105.

Zus. Hier seie nur eine wichtige Folge aus diesem fruchtbaren Saz: (§. 104.) Das erste Glied verhält sich zum dritten, wie das andere zum vierten. 6 : 9 = 2 : 3.

§. 106.

Aufg. Zu zwei gegebenen Zahlen, 2 und 8, die mitlere geometrische Proportional-Zahl zu finden?

Auflösung und Beweis.

Man multiplicire beide Zahlen; und ziehe nach §. 90. aus dem Produkt, 16, die Quadrat-Wurzel, 4. Diese ist die verlangte mitlere proportionirliche Zahl. (§. 102.)

107.

Aufg. Zu zwei Zahlen, 1 und 5, die dritte geometrische proportionirte Zahl zu finden?

Auflösung und Beweis.

Man hat nur die Quadrat-Zahl der zweiten, 25, mit der ersten, 1, zu dividiren: so wird der Quotient, 25, die gesuchte Zahl liefern. (§. 102. 50.)

§. 108.

Aufg. Wie finden wir endlich zu drei Zahlen, 2. 5. 4, die vierte geometrische Proportional-Zahl?

Auflösung und Beweis.

Das Produkt aus der zweiten und dritten, 20, wird nur mit der ersten, 2, dividiret: so ist

der

der Quotient, 10, die verlangte Zahl. (§. 101. 50.)

§. 109.

Anm. Hier ist iene goldene Regel, die Regel Detri.

§. 110.

Anm. Nach dieser werden wir für einen Bruch, $\frac{2}{5}$, leicht einen andern gleichen, dessen Nenner wir erwählen, z. B. 30, durch folgende Proportion 5 : 2 = 30 : (§. 104. 98. 95.) entdekken = $\frac{12}{30}$

§. 111.

Anm. Wollen wir in bestimten Zahlen die Regel Detri benuzzen, so haben wir zuvor die Dingen von einerlei Art zu gleich grosen Theilen zu machen. Und denn können wir um manche Verwirrung in Ansezzung der Glieder zu vermeiden, Dinge von einerlei Gattung unmittelbar auf einander folgen lassen; (§. 105.) aber stets auser Augenmerk auf den §. 103. und 104. richten. Z. E. Ein Wucherer lässet sich von einem Armen für ein geringes Capital in 3. Monaten 12. fl. bezahlen. Wie viel wird er sich nicht schämen in 4. Jahr und 2. Mon. zu nehmen?

3 Mon. --- 4 Jahr und 2 Mon. --- 12 fl

```
          4
         12
        ----
         48
          2
        ----
         50 Mon.
         12 fl
      -------
      3) 600  (200 fl
```

Probe: 12 fl --- 200 fl --- 3 Mon.

```
                 200
                   3
               -----
      12)        600       (50 Monate.
```

§. 112.

§. 112.

Anm. Wenn mehrere an einem Theil nehmen, so muß die Regel Detri so oft als der Theilnehmenden sind, wiederholet werden. Wir wollen uns z. B. einbilden, es triebe eine Gewerkschaft von dreien einen Stollen. Der erste soll die Bergleute 2. Monate, der andere 4, der dritte 6 unterhalten. Am Ende sollen sich 30. fl. Verlust finden. Wie viel Schaden wächst iedem zu?

Ganzer Verlust = 30. fl.

Ausbuse	des ersten	=	2 Monat
	des andern	=	4 Mon.
	des dritten	=	6 Mon.

Ganze Ausbuse = 12 Monate.

12 Mon. --- 2 Mon. --- 30 fl.
30

12) 60 (5 fl. Verlust des ersten.

12 Mon. --- 4 Mon. --- 30 fl.
30

12) 120 (10 fl. Verlust des andern.

12 Mon. --- 6 Mon. --- 30 fl.
30

12) 180 15 fl. Verlust des dritten.

Probe: Verlust	des ersten	=	5 fl.
	des andern	=	10 fl.
	des dritten	=	15 fl.

Ganzer Verlust = 30 fl.

§. 113.

Anm. Aus dem §. 96. fliesen verschiedene Vorthei-
le.

le. Man wird das erste und andere, auch das erste und dritte Glied (§. 105.) mit einer sie vollkommen theilenden Zahl, um sie kleiner zu machen, dividiren können. Z. E.

	56 Pf.	kosten	40 fl.	wie viel	21 Pf.	
7)	8	—	40	—	3	
8)	1	—	5	—	3	
			3			
			15 fl.			

§. 114.

Erkl. Eine Reihe Zahlen, welche alle in gleichen geometrischen oder arithmetischen Verhältnissen fortgehen, heist im ersten Fall eine geometrische; im andern, eine arithmetische Progression, Zahlreihe. Eine geometrische: 1. 2. 4. 8. 16; eine arithmetische: 1. 3. 5. 7. 9. 11.

§. 115.

Erkl. Man nennet die Glieder in einer arithmetischen Zahlreihe die Logarithmen von den gleich mit fortschreitenden Glieder der geometrischen; und die Verbindung solcher Zahlreihen; ein logarithmisches System.

§. 116.

Lehrs. In einer arithmetischen Proportion, ist die Summe der beiden äuseren Glieder gleich der Summe aus den mitleren.

$$4 - 7 = 5 - 8$$

4 + 8 = 12	7 + 5 = 12

Beweis.

Die Summe der beiden äuseren Glieder bestehet

stehet aus dem ersten und dem dritten und der Differenz der Verhältnissen. Die Summe der mitleren bestehet ebenfals aus dem ersten, dritten und der Differenz. (§. 98.) Warum solten sie nun nicht gleich sein? (§. 54.)

§. 117.

Zus. Zu zwei Zahlen, 2 und 4, entdekken wir daher die mitlere arithmetische Proportional-Zahl, 3, wenn wir ihre Summe halb nehmen; zu diesen zwei, die dritte, 6, wenn von der andern zweimal genommen, die erste abgezogen wird; zu drei, 2. 4. 6, die vierte 8, wenn von der Summe der zweiten und dritten, die erste subtrahirt wird. (§. 31.)

§. 118.

Lehrs. Erwählen wir ein logarithmisches System, darin der Logarithmus von 1 eine Nulle ist: so können wir durch die Logarithmen das multipliciren in addiren, das dividiren in subtrahiren verwandlen.

Beweis.

In einem ieden Logarithmischen System stehet einer geometrischen Proportion eine arithmetische zur Seiten. (§. 115. 114.) Es stehen auch 1 und ein Factor, z. E. 4, der andere, 3, und das Produkt, 12, in einer geometrischen Proportion. (§. 98. 94. 41.) Der Logarithmus des Produkts ist also hier die vierte arithmetische Proportional-Zahl zu den Logarithmis von 1, einem Factori und dem andern. Dieser Logarithmus

muß

muß auch herauskommen, wenn man von der Summe der beiden mitleren, d. i. der Factorum den Logarithmum von 1 abziehet. (§. 117.) Dieser ist eine Null, vermöge der Bedingung. Also muß selbst die Summe des Factorum bleiben für den Logarithmum des Produkts. Verlangen wir nun ein Produkt, so dörffen wir nur die Logarithmen der Factorum addiren, und die Zahl dieser Logarithmischen Summe im System aufsuchen.

Eins und der Quotient, der Divisor und der Dividendus machen eine geometrische Proportion aus. (§. 98. 94. 47.) Der Logarithmus des Quotienten ist also hier die vierte arithmetische Proportional-Zahl zu dem Divisori, dem Dividendo und 1. (§. 104. 115. 114.) Diese finden wir, wenn wir den Log. des Divisoris von der Summe der Logarithmorum des Dividendi und 1, d. i. weil Log. von 1 Null ist, selbst von dem Log. des Dividendi abziehen. Diese durch die Subtraction gefundene Differenz ist also der Log. des Quotienten, den wir im System nachsuchen.

§. 119.

Zus. Weil in iedem wahren Bruch, z. E. $\frac{5}{8}$ der Divisor, 8, gröser ist als der Dividendus, 5: so muß die Differenz, wenn iener von diesem abgezogen wird, ein Mangel sein; und der Bruch geschrieben werden — d. i. weniger der logarithmischen Differenz.

§. 120.

Zus. Wird nicht der doppelte Logarithmus der Wurzel der Log. des Quadrats und der Logarithmus von diesem halb genommen, der Log. der Quadrat-Wurzel sein? (§. 118. 86.) So muß auch der Log. der Wurzel dreimal genommen, den Logarithmum des Cubi; und der dritte Theil von diesem, den Log. der Cubic-Wurzel ausmachen. (§. 118. 87.)

§. 121.

Anm. Nepper / Brigge / Vlac haben dieses System:

1	10	100	1000
0.0000000,	1.0000000,	2.0000000,	3.0000000

u. s. f. erwählet, und die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100 000 erfunden.

§. 122.

Anm. In diesem System sind die Logarithmen aller zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen mehr als 0 und weniger als 1, und daher Brüche. Ingleichen die Logarithmen aller zwischen 10 und 100, u. s. f. befindlichen Zahlen. Jedoch stehet hier vor den Decimal-Brüchen stets eine ganze Zahl 1, 2, 3 u. s. f.

§. 123.

Anm. Diese ganze Zahl heist die Kenziffer des Logarithmi, und hat immer einen Einer weniger, als Klassen der zugehörigen Zahl sind.

§. 124.

Zus. Hängen wir nun einer Zahl ein oder zwei 0 an, d. i. multipliciren wir sie mit 10 oder mit 100 u. s. f. so müssen die Decimal-Brüche unverändert bleiben, und die Kenziffer um einen oder zwei u. s. f. Einer zu nehmen. (§. 118. 121.) Z. E.

Z. E.	Log. von 43	=	1.6334685
	Log. von 100	=	2.0000000
	Log. von 4300	=	3.6334685

§. 125.

Zus. Der Log. eines wahren Bruches, $\frac{5}{8}$, ist die Differenz der Logarithmorum von 5 und 8, davor das Zeichen des Mangels — gesezt wird. (§. 119.)

Z. E.	Log. von 8	=	0.9030900
	Log. von 5	=	0.6989700
	Log. von $\frac{5}{8}$	=	0.2041200

§. 126.

Anm. Es ist in diesem System merkwürdig, daß die Unterscheide der Logarith. und ihrer Zahlen in einer ziemlich genauen geometrischen Proportion stehen. Z. E.

Zahl	9436.	Log. derselben	3.9747879
—	9432.	— —	3.9746038
Differenz	= 4	Differenz	= 1841
Zahl	9434.	Log. derselben	3.9746959
—	9432.	— —	3.9746038
Differenz	= 2	Differenz	= 921

Hier verhält sich beinahe 2 : 4 — 921 : 1841. Denn 1841 . 2 = 3682 und 921 . 4 = 3684. (§. 103.)

Ende der Arithmetik.

Der

Geometrie

Erster Abschnitt.

Von Linien, Winkeln und Figuren.

§. 127.

Erkl. Wer sich in der Geometrie ein Ding ohne alle Theilen auser einander denken kan, der weiß, was ein Punkt ist. Schleicht dieser für sich hin, so reicht uns der Raum, den er in seiner Bewegung durchlauft, den Begriff einer Linie; einer geraden, wenn sich seine Richtung weder zur Rechten noch zur Linken lenket. Geschiehet aber diese Abweichung beständig, so haben wir eine krumme. Bewegt sich endlich eine Linie nach einer andern Richtung als der sie zeugende Punkt hatte, so entsteht eine Fläche.

§. 128.

Grds. Zwischen zweien Punkten ist nun nicht mehr als eine gerade Linie möglich; die auch gewis die kürzeste zwischen denselben sein muß.

§. 129.

Zus. Zwei gerade Linien werden demnach keinen Raum zuschliesen können.

§. 130.

Anm. Zum willkührlichen Maas der Linien hat man in der Geometrie eine Länge gewählet, die man eine Ruthe nennet. Sie wird in 10. gleiche Theilen, welche

welche Schuhe heisen; ieder Schuh in 10. Zolle; ieder Zoll in zehen sogenanten Linien zergliedert. Man bezeichnet alle folgendermaasen: $1^{\circ}2^{\prime}5^{\prime\prime}3^{\prime\prime\prime}$.

§. 131.

Erkl. Die Neigung zweier sich in einem Punkt a berůhrenden Linien ab und ac gegen einander, heiset ein Winkel. Er wird mit a, oder bac, oder auch einem Buchstaben, den man in die Neigung selbst sezzet, bezeichnet. Der Berůhrungspunkt a, heist die Spizze desselben. Die Linien ab und ac die Seiten oder Schenkeln. Fig. I.

§. 132.

Erkl. Die an dem Durchschneidungspunkt zweier Linien sich gegenůberstehende Winkeln a und b, heisen verticale Winkeln (anguli verticales.) Und die Winkel c und b, welche entstehen, wenn man den einen Schenkel eines Winkels b durch die Spizze verlångert, werden Nebenwinkeln (deinceps positi) genennet. Fig. II.

§. 133.

Erkl. Richten wir eine gerade Linie mn auf einer andern cd also auf, daß die Nebenwinkeln o und x einander gleich sind: so ist die Linie mn eine senkrechte oder perpendiculare Linie auf cd; und die gleiche Winkeln o und x werden rechte Winkeln genennet. Fig. III.

§. 134.

Zus. Perpendiculare Linien und rechte Winkeln sind demnach unzertrenlich.

§. 135.

Zus. Ist es nun möglich, daß zwei auf einer Linie cd stehende perpendiculare Linien ac und mn sich iemals einander nähern oder von einander entfernen könten? Sie würden ia dadurch verschiedene Neigungen gegen die Linie cd annehmen müssen. Und das wiederspricht einer perpendicularen Linie. (§. 133. 131.) Fig. III.

§. 136.

Erkl. Der Winkel c, welcher gröser ist als ein rechter, heist ein stumpfer; und b, welcher kleiner als ein rechter ist, ein spizziger. Beide nent man schiefe Winkeln. Fig. II.

§. 137.

Erkl. Wenn zwischen zweien Linien cd und ab alle perpendiculare Linien ac, bd, u. s. f. gleich sind, so haben sie allenthalben gleiche Entfernung von einander, und werden parallele Linien genennet. Fig. III.

§. 138.

Zus. Alle perpendiculare Linien, ac, mn, bd, u. s. f. auf einer Linie cd müssen daher unter einander parallel sein. (§. 135.) Ja alle auf eine Linie cd mit einem Perpendikel mn parallel gezogene Linien ac, u. s. f. müssen senkrecht auf derselben stehen. Dann sie müssen alle einerlei Neigung mit dem Perpendikel gegen die Linie cd haben. (§. 137. 133.) Fig. III.

§. 139.

Erkl. Unter der Figur denken wir uns eine von Linien eingeschlossene Fläche. Diese muß eine

ne gerad oder krumlinichte sein. (§. 127.) Sind in den geradlinichten alle Seiten und Winkeln einander gleich, so nent man sie reguläre; sonsten irreguläre Figuren.

§. 140.

Erkl. Man schliese einen geradlinichten Winkel a mit der geraden Linie b c zu, so hat man einen geradlinichten Triangel, (wovon allhier die Rede sein wird.) Fig. VIII. Er ist in Ansehung der Winkeln, ein rechtwinklichter, wenn sich unter den Winkeln ein rechter befindet; Fig. VIII. ein stumpfwinklichter, wenn ein stumpfer Winkel in demselben ist; Fig. IX. ein spizwinklichter, wenn alle spizzig sind. Fig. X. Von den Seiten erhält der Triangel den Nahmen eines gleichseitigen, wenn alle drei Seiten gleich sind; Fig. X. eines gleichschenklichten, wenn nur zwei Seiten gleich sind; Fig. XII. eines ungleichseitigen, wenn keine Seite der andern gleichet. Fig. IX.

§. 141.

Erkl. Eine Figur von vier gleichen Seiten und so viel rechten Winkeln, heist ein Quadrat, □; Fig. IV. sind nur die gegenüberstehende Seiten, nebst vier rechten Winkeln gleich, so ist die Figur ein Rectangulum, länglichtes Vierek. Fig. V. Bleiben die vier Seiten gleich und alle Winkeln werden schief, so gibts eine Raute, Rhombus; Fig. VI. sind nur nebst den vier schiefen Winkeln die gegenüberstehende Seiten gleich, so haben wir eine länglichte Raute,

Rhomboides. Fig. VII. Alle übrige Vierekke mögen Trapezia heisen. Und überhaupt eine mehr als vier Winkeln habende Figur, ein Polygonum, Vielek. Fig. XXVIII. Besonders nennen wir sie aber wieder: Fünfek, Sechsek, u. s. f.

§. 142.

Erkl. Das Vierek, darin die gegenüberstehende Seiten parallel sind, wird ein Parallelogrammum genennet.

§. 143.

Erkl. Die sehr merkwürdige krumlinichte Figur, welche entsteht, wenn sich die gerade Linie cb um den unbeweglichen Punkt c herumbeweget, heist ein Cirkel. Fig. XI. Dieser unbewegliche Punkt c, das Centrum, der Mittelpunkt. Die von dem Endepunkt b der Linie cb beschriebene krumme Linie beadb, die Peripherie, der Umkreis. Ein Theil desselben are, ein Bogen. Jene gerade Linie von dem Centro c an bis in die Peripherie, nennen wir den Radium oder Halbmesser. Die gerade Linie ae, welche aus einem Punkt der Peripherie in den andern gehet, eine Sehne, Chorde. Fliefet sie durch den Mittelpunkt, wie ab, so heist sie Diameter, Durchmesser. Einen Ausschnitt stelt der Theil des Cirkels acera; und einen Abschnitt, der Theil aera vor.

§. 144.

Anm. Man schreibt einem ieden Cirkel, er mag gros oder klein sein, 360 gleiche Theilen zu, welche gra-

de heisen. Jeder Grad, 1°, enthält 60' Minuten; iede Minute 60'' Secunden; iede Secunde 60''' Tertien, u. s. f.

§. 145.

Anm. Das Maas aller Winkeln ist der Bogen eines Cirkels, dessen Mittelpunkt in a, der Spizze iedes Winkels ist. Die Grade dieses Bogens werden den Winkeln beigelegt, und machen also auch das Maas derselben aus. Die Anzahl dieser Graden muß gewis einerlei bleiben, der Bogen mag weit von der Spizze entfernt oder nahe bei ihr sein. (§. 144.) Fig. I.

§. 146.

Zus. Alle um einen Punkt stehende Winkeln müssen demnach 360° ausmachen. Fig. II.

Zweiter Abschnitt.

Von der Gleichheit der Figuren.

§. 147.

Erkl. Wenn wir zwei Linien ab und ac dergestalt aufeinander legen können, daß die äuserste Punkten a und a auch b und c aufeinander fallen, d. i. nur einen Punkt ausmachen: so dekken sie einander. Lassen sich aber die Schenkeln eines Winkels so auf die Schenkeln des andern legen, daß iene in diesen verschwinden, oder daß iene mit diesen nur zwei Schenkeln ausmachen: so müssen Winkeln einander dekken. Findet sich dieses an allen Seiten und Winkeln zweier Figuren: so dekken Figuren einander. Fig. I.

§. 148.

Grds. Linien und Winkeln, die einander dekken, sind sich gleich; und wenn sie gleich sind, dek-

dekken sie einander. Sich einander dekkende Figuren sind ebenfals gleich; aber nur gleiche Figuren von einerlei Art können einander dekken.

§. 149.

Grds. So sind auch Linien, Winkeln und Figuren gleich, die einerlei Maas haben; und solte ihre Gleichheit nicht einerlei Maas erfodern? (§. 9.)

§. 150.

Grd. Alle Radii eines Cirkels müssen nothwendig gleich sein; (§. 143. 4.) und den halben Diameter vorstellen: weil der Radius als eine und eben dieselbe Linie bei dem Diameter zweimal genommen wird.

§. 151.

Grds. Es ist möglich, auf einer ieden geraden Linie cd aus einem angenommenen Punkte n einen halben Cirkel zu beschreiben; der also nebst allen in demselben befindlichen Winkeln 180° haben muß. (§. 144.) Fig. III.

§. 152.

Zus. Müssen daher nicht die Nebenwinkeln c und b iedesmal 180° ausmachen? und muß nicht einer c von beiden Nebenwinkeln herauskommen, wenn wir die Graden des andern b von 180° abziehen? (§. 31.) Fig. II.

§. 153.

Zus. Es ist möglich auf dem Mittelpunkte n eine perpendicular Linie nm aufzurichten. Hier müssen beide Nebenwinkel sowol rechte (§. 134.)

als

als auch gleich sein. (§. 133.) Jeder rechter Winkel hat also 90 ° und alle sind sich gleich. (§. 149) Fig. III.

§. 154.

Lehrs. Alle um einen Punkt herumstehende Winkel sind zusammen genommen, vier rechten gleich.

Beweis. Fig. II.

Sowol vier rechte, als alle um einen Punkt stehende Winkeln haben zum Maas 360 °; (§. 153. 146.) und also sind diese ienen gleich. (§. 149.)

§ 155.

Lehrs. Verticale Winkel, a und b, sind einander gleich.

Beweis. Fig. II.

Der Winkel a † c ist = 180 °. (§. 152.) desgleichen b † c = 180 °. Demnach a † c = b † c (§. 149.) und also a = b (§. 4. 6.)

§. 156.

Lehrs. Sind in zweien Triangeln zwei Seiten, AC und ac, AB und ab nebst dem eingeschlossenen Winkel A und a gleich: so müssen die ganze Triangeln gleich sein.

Beweis. Fig. X.

Man lege in Gedanken den Punkt a auf A und lasse die Linie ab auf AB sinken. Sie sind einander gleich. Sie werden sich dekken (148.) und der Punkt b auf B fallen müssen. (147.) Nun ist der Winkel a = A. Es muß also ac in

in AC fallen. (§. 148.) Sie sind sich gleich. Der Punkt c muß daher in C fallen, (§. 147.) oder ac und AC einander dekken. (§ 147.) Endlich kan die Linie cb nicht neben CB fallen. (§. 128.) Alle Seiten müssen sich demnach und mit denselben auch die Winkeln dekken; (§. 147.) und die Triangeln einander vollkommen gleich sein. (§. 148.)

§. 157.

Zus. Gleichen sich nun in zweien rechtwinklichten Triangeln die beide den rechten Winkel einschliesende Seiten: so sind gewis die zwei ganze Triangeln gleich. Fig. VIII.

§. 158.

Lehrs. Zwei Triangeln sind vollkommen gleich, wenn die drei Seiten des einen denen drei Seiten des andern gleich sind.

Beweis. Fig. X.

Man sezze den Punkt a auf A; rükke ac in AC: so muß der Punkt c auf C fallen. (§ 148. 147.) Man bilde sich ein, AB und CB wären noch nicht in B; ab und cb noch nicht in b vereinigt. Alle sind gleich. Sie lassen sich daher so auf einander legen, daß ab die AB, und cb die CB dekket, (§. 148.) und die äusersten Punkten dieser vier Linien b und B auf einander liegen oder nur einen Punkt ausmachen. (§. 147.) Nun denke man, AB mit der auf ihr liegenden ab; und CB mit der auf ihr liegenden cb bewegten sich langsam gegen einander. Ist es nun möglich, daß sich cb weiter als CB, ab weiter als

AB

AB nach der Grundlinie zu bewegen könte? Nein; wo AB die Linie CB im äusersten Punkte berühret, da muß auch a b die c b also treffen. Dann sie haben nur einen äusersten gemeinschaftlichen Punkt. So dekken nun alle Seiten beider Triangeln einander und mit ihnen die Winkeln. (§. 147.) Die ganze Triangeln werden sich also gleich sein. (§. 148.)

§. 159.

Zus. Aus diesem Beweis, fliefet zugleich, daß in gleichen Triangeln gleichen Seiten gleiche Winkeln, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberstehen müssen; und daß in einem Triangel die grösere Seite einen gröseren Winkel; die kleinere Seite einen kleineren Winkel; der grösere Winkel eine grösere Seite; der kleinere, eine kleinere gegen sich über habe. (§. 131.)

§. 160.

Zus. Muß nicht auch die Diagonallinie a b das □, Rectangulum, Rhombum, und Rhomboidem in zwei gleiche Triangeln theilen? (§ 141.) und müssen nicht die Wechselswinkel o und x, m und n einander gleich sein? (§. 159.) ja wird nicht aus eben dem Grund c = d, und a = b sein? (§. 5.) Fig. VII.

§. 161.

Zus. Wenn nun in zwei □ eine Seite gleich ist: so müssen sie sich ganz gleich sein. Gleichen sich in zweien Rhombis eine Seite und ein Winkel: so sind die ganze Rhombi gleich. Sind in zweien Rectangulis zwei an einander hängende

Sei-

Seiten gleich: so müssen sich die ganze Rectangula gleichen. Auch werden zwei Rhomboides gleich sein: wenn in ihnen zwei an einander stehende Seiten und ein Winkel gleich sind. (§. 141.)

§. 162.

Aufg. Eine perpendiculare Linie auf einem angewiesenen Ort a in einer Linie bc aufzurichten.

Auflösung. Fig. XII.

Man sezze 1) den Cirkel in a, und durchschneide mit willkürlicher aber eben derselben Eröfnung die Linie bc in m und n.

2) Aus den Punkten m und n mache man mit einerlei Oefnung des Cirkels Durchschnitte in d, und ziehe die Linie da. Diese muß senkrecht auf bc stehen.

Beweis.

In denen Triangeln dam und dan ist die Linie da gemeinschaftlich und sich selbst gleich, (§. 4.) ferner ist am = an und dn = dm gemacht worden. (§. 150.) Daher muß x = o (§. 158. 159.) oder rechte Winkeln sein, (§. 133.) und da auf bc perpendicular stehen. (§. 134.)

§. 163.

Auf. Wie senken wir aber eine perpendiculare Linie auf die Linie bc aus einem über ihr gegebenen Punkt d?

Auflösung. Fig. XII.

1) Werde der eine Fuß des Cirkels in d gesezt und mit dem andern die Punkten m und n

in

in der gegebenen Linie mit gleicher Eröfnung abgestochen.

2) Mit einerlei Oefnung mache man auch Durchschnitte aus m und n in e, und ziehe die Linie de; oder, wenn kein Raum unter bc sein solte, so mache man diese Durchschnitte in k, und ziehe durch d und k die Linie da auf bc. da wird senkrecht auf bc stehen.

Beweis.

Im ersten Fall ist der Triangel dme = dne (§. 158.) und also r = s. (§ 159.) Muß nun nicht auch △ amd = and (§. 156.) und o = x sein? (§. 159.) o und x sind demnach rechte Winkeln (§. 133.) und die Linie da stehet senkrecht auf bc. (§. 134.)

Im andern Fall wird der △ dmk = dnk (§. 158.) und der Winkel dkm = dkn sein. (§. 159.) Gewis ist nun auch u = y (§. 152. 6.) ferner ist △ kam = kan (§. 156.) und o = x (§. 159.) d. i. rechte Winkeln (§. 133.) und da senkrecht auf bc. (§. 134.)

§. 164.

Zus. Wie leicht ist es nach dieser Auflösung, weil dadurch am = an gemacht wird, eine Linie in zwei gleiche Theilen zu zerschneiden? Wie leicht, weil r = s, einen Winkel in zwei gleiche Theilen zu zergliedern? wenn man mit einerlei Eröfnung des Cirkels aus der Spizze d in dessen Schenkeln die Punkte m und n absticht, von da aus Durchschnitte in e macht und die Linie de ziehet. (§. 158. 159.) Fig. XII.

§. 165.

§. 165.

Zus. Weil bei iedem gleichschenklichten Triangel iene Auflösung (§. 163.) einmal; bei iedem gleichseitigen mehrmalen kan angebracht werden: so folgern wir hieraus mit völliger Gewisheit, daß in einem gleichschenklichten Triangel d m n die Winkeln p und q an der Grundlinie gleich sein müssen; daß in einem gleichseitigen alle Winkeln gleich sind; und daß die aus der Spizze dieser Triangeln gefällete perpendiculare Linie d a die Grundlinie m n nicht nur, sondern auch den ganzen Triangel d m n in zwei gleiche Theilen zerschneiden muß. (§. 158. 156.) Fig. XII.

§. 166.

Aufg. Man sol eine parallele Linie durch den vorgezeichneten Punkt b mit der Linie cd ziehen.

Auflösung und Beweis. Fig. III.

1) Senke man aus dem gegebenen Punct b einen Perpendikel auf cd; und beschreibe

2) Einen Bogen mit der Eröfnung des Cirkels = bd aus c gegen a, den man mit einem andern = cd aus b durchschneidet. Durch diesen Durchschneidungspunkt a muß die verlangte parallele Linie ab gezogen werden können. (§. 160. 137.)

§. 167.

Zus. Solte man nicht auch auf dem Ende c einer Linie cd einen Perpendikel aufrichten: wenn man durch c eine parallele Linie ca mit einer perpendicularen mn ziehet? (§. 138) Fig. III.

§. 168.

§. 168.

Lehrs. Werden von einer Linie EF zwei parallele Linien AB und CD durchschnitten; so müssen 1) Die Wechselswinkeln o und x, m und n einander gleich sein, 2) Muß der äusere u dem inneren x gleichen; und 3) Die zwei inneren x und y † n 180 ° ausmachen.

Beweis. Fig. XIII.

Man lasse 1) einen Perpendikel aus K auf L sinken, und erhöhe einen MN aus M in der Linie CD. Diese perpendiculare Linien NM und KL müssen sowol gleich (§. 137.) als auch unter einander parallel sein. (§. 138.) Nun sehe man KL für die Grundlinie an: so wird nicht nur ML ein Perpendikel auf ihr sein, (§. 134.) sondern auch zugleich NK. (§. 138.) Wird nun nicht ML = KN sein müssen; da NM und KL parallel waren? (§. 137.) und ist nicht deswegen 1) o = x? (§. 158. 159.)

2) Weil o = u (§. 155.) so muß auch x = u sein. (§. 9.)

3) Da u † yn = 180 ° (§. 151.) so ist endlich auch x † yn = 180 ° (§. 1. oder §. 7.)

§. 169.

Lehrs. Alle drei Winkeln eines jeden Triangels züsammen genommen machen 180 ° aus; und wenn eine seiner Seiten verlängert wird, so muß der äusere Winkel die

Gröse

Gröse der beiden inneren ihm gegenüberstehenden haben.

Beweis. Fig. XIV.

Wenn wir a c verlängern und aus c eine parallele Linie cd mit der gegenüberstehenden Seite ab ziehen: so muß n = N (§. 168. n. 1.) und m = M sein. (§. 168. n. 2.) Ist aber nicht o † N † M = 180 ° (§. 151.) Es werden also auch o † m † n oder 1) alle Winkeln eines Triangels 180 ° haben (§. 1. oder §. 7.) und denn

2) Der äusere Winkel N † M den beiden inneren n und m gleich sein müssen.

§. 170.

Zus. Nun ist es unmöglich, daß mehr als ein rechter oder stumpfer Winkel in einem geradlinichten Triangel solte sein können. Er wird auch durchaus nicht einen rechten und stumpfen zugleich enthalten können.

§. 171.

Zus. Was ist auch begreiflicher, als daß in einem rechtwinklichten Triangel die beiden spizzigen Winkeln 90 ° ausmachen? (§. 153.) und einer derselben von 90 ° abgezogen den andern übrig lasse? (§. 31.) Daß wir durch den Abzug zweier Winkeln von 180 ° den dritten erfahren? Durch den Abzug dieses dritten von 180 ° die Summe der beiden übrigen? (§. 31.)

§. 172.

Zus. Wir folgern weiter hieraus: Sind in zweien Triangeln zwei Winkeln gleich, so muß

gewis

gewis auch der dritte in ihnen gleich sein. (§. 6. 55.) Endlich wird in einem gleichseitigen △ ieder Winkel 60 Gr. haben. (§. 165.)

§. 173.

Lehrs. Solten zwei Linien AB und CD von einer dritten EF dergestalt durchschnitten werden, daß entweder 1) Die Wechselswinkeln, o und x, m und n gleich wären, oder 2) Der innere x dem äuseren u gleichen solte, oder auch 3) Die beiden inneren x und yn zusammen 180 ° betrügen: so müssen AB und CD parallel sein?

Beweis. Fig. XIII.

Man senke eine perpendiculare Linie KL aus K auf L in der Linie CD. Man trage ML aus K auf der Linie AB in N und ziehe die Linie NM. Sind nun 1) Die Wechselswinkel o und x gleich: so ist gewis auch MN = KL. (§. 156.) Uiberdas muß noch r = s (§. 159.) und weil s ein rechter Winkel (§. 134.) auch r ein rechter sein; MN ist also auch eine perpendiculare Linie zwischen AB und CD. (§. 134. verglichen mit §. 169.) Solten nun nicht AB und CD parallel sein. (§. 137.)

2) Sezze man, es seie u = x. Weil nun auch u = o (§. 155.) so wird wieder o = x sein, (§. 9.) und der vorige Beweis auch hier statt haben.

3) Endlich sei noch yn † x = 180 °. Es ist u † yn = 180° (§. 151.) und demnach auch

hier u = x. (§. 6. 55.) Auch in diesem Fall wird also, wie im ersten erwiesen, daß die Linien AB und CD parallel sein müssen. (n. 2.)

§. 174.

Zus. Was fliesset hieraus mit grösserer Gewisheit, als daß alle Quadraten, Rectangula, Rhombi, und Rhomboides Parallelogrammen sein müssen? (§. 160.)

§. 175.

Lehrs. Sind in zweien Triangeln zwei Winkeln und eine Seite gleich, so müssen die ganze Triangeln einander gleich sein.

Beweis. Fig. X.

Es seie ac = AC; und wenn wir nun den Winkel a = A, b = B annehmen: so wissen wir schon, daß auch c = C sein müsse. (§. 172.) Man stelle sich nun vor, es würde a auf A und ac auf AC geleget. Wird nun nicht c in C sinken, und AC und ac einander dekken? (§. 148. 147.) Es ist auch der Winkel a = A und c = C. Die Seiten ab und AB müssen demnach so auf einander sinken daß sie nur eine Linie ausmachen; und so auch cb und CB. (§. 148. 147.) In welchem Punkt sich also AB und CB durchschneiden, in eben demselben müssen sich auch die in ihnen liegende Linien ab und cb durchkreuzen. Der Punkt b wird demnach auf B fallen, und die ganze Triangeln einander dekken (§. 147.) oder gleich sein. (148.)

§. 176.

Zus. Ist also in zweien rechtwinklichten

Trian-

Triangeln eine Seite ac = AC und auser dem rechten Winkel noch einer, b = B: so sind die ganze △ gleich. Fig. VIII.

§. 177.

Zus. Weil in iedem Parallelogram nach gezogener Diagonallinie ab, der Winkel o = x und m = n sein muß: (§. 168. 142.) so flieset auch aus diesem Lehrsaz die Folge, daß ein Parallelogram von der Diagonallinie ab in zwei gleiche △ adb und acb zerfället werde; und also in iedem Parallelogram die gegenüberstehende Seiten ad = cb und ac = bd, (§. 159.) ia auch die gegenüberstehende Winkeln c = d (§. 159.) und a = b sein müssen. (§. 5.) Fig. VII.

§. 178.

Zus. Wird nun nicht auch ein iedes Parallelogram entweder ein Quadrat, oder ein Rectangulum, oder ein Rhombus, oder endlich ein Rhomboides sein? (§. 141.)

§. 179.

Erkl. Die perpendiculare Linie Be, welche aus der Spizze eines △; oder ab, die von einer Seite des Parallelograms auf die gegenüberstehende gezogen wird, heist dort die Höhe des △, hier des Parallelograms. Die Seite darauf der Perpendikel ruhet wird die Grundlinie, basis, genennet. Fig. X. und VI.

§. 180.

Zus. Ein iedes Parallelogram muß demnach aus zwei gleichen △ bestehen, die gleiche Höhe

und Grundlinie mit demselben haben. (§. 177. 142. 137.)

§. 181.

Lehrs. Sind in einem Triangel dnm die Winkeln an der Grundlinie gleich: so ist der Triangel ein gleichschenklichter; und sind alle Winkeln gleich: so ist er ein gleichseitiger.

Beweis. Fig. XII.

Man kan 1) den Winkel d an der Spizze in zwei gleiche Theilen mit einer Linie, da, die darauf in beiden △ dna und dma gemeinschaftlich ist, zerschneiden. (§. 164.) Weil nun p = q und auch r = s: so muß die Seite dm = dn (§. 175. 159.) und der Triangel dmn ein gleichschenklichter sein. (§. 140.) 2) Wenn nun alle Winkeln gleich sind: so kan man für die gehabte Grundlinie nun eine andere Seite nehmen und den Beweis wie vorhin bilden.

§. 182.

Lehrs. Zwei Triangeln müssen einander gleich sein: wenn ein Winkel, die an ihm liegende, und die nicht kleinere ihm gegenüberstehende Seite in beiden gleich sind.

Beweis. Fig. IX.

Es seie m = M, die anliegende Seite mn = MN und 1) die grössere gegenüberstehende NO = no. Vermöge der Bedingung müssen die Schenkeln MN und mn, MO und mo auf einander fallen; die Seiten MN und mn,

No

No und no sich dekken. (§. 148. 147.) Nun komt es auf den Punkt an, in welchem die sich dekkende Seiten NO und no, die einander dekkende Schenkel MO und mo berühren. Man eröfne daher einen Cirkel = NO oder no, sezze ihn mit einem Fuß in N oder n und sehe ob man an einem andern Ort als O oder o den unteren Schenkel von M oder m treffen könne. Es wird nicht möglich sein: weil NO oder no grösser als MN oder mn. (§. 150.) Es wird also auch nicht möglich sein, daß no die sich dekkende Schenkeln MO und mo an einem andern Ort berühret als es NO thut; welches man hätte befürchten müssen, wenn mehrere Berührungspunkten wären möglich gewesen; und no über NO von einem Berührungspunkt zum andern wäre weggeschoben worden. Also wird MO = mo und die ganze △ gleich sein. (§. 156. oder 158.) Die △ bleiben auch gleich, wenn

2) Die dem gleichen Winkel A gegenüberstehende Seite BC der anliegenden AB gleich ist. Fig. X. Dann hier findet sich wieder, wenn zwei Triangeln bleiben sollen nur ein Berührungspunkt C. Sezzen wir aber

3) Den Winkel o = O, die anliegende on = ON, die gegenüberstehende nm = NM aber kleiner als die anliegende: so kan nun nm und mit ihr NM den unteren Schenkel von o sowol in m als in einem andern Punkt, wenn er verlängert wird, berühren und eine über die an-

 dere

dere weggeschoben werden. Es darf demnach die gegenüberstehende Seite nur nicht kleiner als die anliegende sein.

§. 183.

Zus. Wer wird nun leugnen, daß zwei rechtwinklichte △ gleich seien, wenn sich die an dem rechten Winkel a und A liegende Seite ab und und AB und die ihm gegenüberstehende bc und BC gleichen. (§. 159.) Fig. VIII.

§. 184.

Anm. Eine gerade Linie auf dem Papier zu ziehen gebrauchen wir ein richtiges Linial. Auf dem Felde kan es mit einer Schnur geschehen; und durch eine solche perpendiculäre Aufrichtung der Messtaben, wobei der nächste am Auge alle übrigen der Geschichtslinie entzieht.

Zur Ausmessung einer geraden Linie bedienen wir uns auf dem Papier eines Cirkels. Wir sezzen nemlich den einen Fuß desselben auf das eine Ende der Linie, den andern in das andere Ende, und halten diese unverrükte Eröfnung an einen Maasstab, den wir uns selbst verfertigen können. (§. 130.) Ist aber die Linie gros, so kan dieses mit allen Theilen vorgenommen werden. Auf dem Felde messen wir eine gerade Linie durch eine so oftmalige Ziehung einer Schnur, oder Meskette, oder Stange, deren Maas bekant, über dieselbe als nötig ist.

§. 185.

Aufg. Wie werden wir einen Winkel auf dem Papier messen?

Auflösung und Beweis. Fig. I.

Man lege einen Transporteur also auf den

zu

zu messenden Winkel bac, daß dessen Spizze oder Mittelpunkt genau auf die Spizze des Winkels a falle. Nun zähle man die auf dem Transporteur als einem halben Cirkel abgestochene Graden, welche zwischen den beiden Schenkeln ab und ac enthalten sind. Diese sind das Maas des Winkels a. (§. 145.) Hier können wir auch einen vorteilhaften Gebrauch eines Chorden Maasstabes machen.

§. 186.

Aufg. Wie geschieht dieses auf dem Felde?

Auflösung und Beweis. Fig. XXXIX.

Wir verrichten es I) mit solchen Instrumenten, darauf man selbst den Winkel auf das über dem Instrument liegende Papier zeichnet. Unter diesen erwählen wir gemeiniglich

1) Das Mestischgen. Dieses sezze man, um den Winkel BAC zu messen, dergestalt, daß der Punkt a, welcher die Spizze des Winkels auf dem Tischgen werden soll, senkrecht über A stehe. Jezt lege man das Diopterlinial an a und rükke es so lang an diesen Punkt bis man durch die Dioptern den Punkt C also erblikket, daß er von der in der einen Diopter ausgespanten Pferdehaar bedekket werde. Nun ziehe man an unverrüktem Diopterlinial die Linie ac. So visiret man auch nach B, zieht ab und erhält den Winkel bac = BAC (§. 147. 148.) den man nach §. 185. messen kan.

2) Die Messcheibe. Den Mittelpunkt derselben

selben richtet man senkrecht über A auf. Durch das am Mittelpunkt bewegliche Diopterlinial visiret man nach C und bemerkt die Linie a c mit einem kurzen Linlein sowol vor als hinter dem Mittelpunkt, welche Stüklein von Linien mit einerlei Zeichen bezeichnet werden. Eben so verfähret man mit der Linie A B. Darauf trägt man den Winkel B A C, welchen die beiden bezeichneten Linien auf dem über der Scheibe liegenden Papier machen, auf ein anderes ab; und misset ihn nach §. 185.

II) Wir bedienen uns auch solcher Instrumenten, die uns selbst unmittelbar die Graden der Winkeln zeigen. Hier haben wir

1) Das Astrolabium. Dessen Mittelpunkt richten wir über A senkrecht auf; und stellen es also, daß wir durch die auf dem Diameter befindliche unbewegliche Diopteren den Punkt C gehörig sehen. Das bewegliche Linial rükken wir nun bis wir durch dessen Absehen B erblikken. Die von dem Diameter (gegen C) bis an den Punkt, darauf die Schärfe dieses beweglichen Linials ruhet, befindliche Graden, sind das Maas des Winkels B A C. (§. 145.)

2) Die Boussole, wovon mündlich.

§. 187.

Anm. Der an einem Faden hängende schwere Körper dehnt denselben nach einer auf die Erde sinkenden perpendicularen Linie aus. Die Fläche, auf welcher diese perpendicular stehet, heist eine horizontale Fläche. Da hingegen eine andere, die rechtwinklicht auf dieser

stehet,

stehet, eine verticale Fläche genennet wird; und die, welche einen schiefen Winkel mit der horizontalen Fläche macht, eine schiefe Fläche heist. Wenn wir Winkeln in horizontalen Flächen messen: so muß auch das Instrument horizontal stehen. Haben wir es mit Winkeln in verticalen Flächen zu thun: so richten wir es vertical auf. Soll aber der Verticalwinkel auf einer horizontalen Fläche stehen, d. i. dessen eine Seite horizontal sein: so sezze man das verticale Astrolabium also, daß dessen Diameter horizontal stehe; auf dem vertical gestelten Tischgen muß man aber vorher eine parallele Linie mit einer Seite gezogen haben, und richtet nun diese horizontal. Jene Linie gibt den horizontalen Schenkel. Wollen wir endlich den wahren Winkel auf einer schiefen Fläche wissen: so muß das Instrument eben diese schiefe Lage haben.

§. 188.

Aufg. Einen gegebenen Winkel bac an die Linie AC auf dem Papier zu sezzen.

Auflösung und Beweis. Fig. XV.

Es kan uns 1) der Winkel bac in Graden gegeben werden. Hier lege man des Transporteurs Mittelpunkt auf den Punkt A der Linie AC und zähle von der Linie AC an die bestimte Graden ab; bemerke daselbst den Punkt B und ziehe die Linie AB. (§. 149.) Wenn uns

2) Der Winkel bac nur vorgezeichnet wird: so sezze man einen Cirkelfuß in a und beschreibe mit dem andern den Bogen mn. Mit eben dieser Eröfnung mache man aus A den Bogen rp über der Linie AC. Nun stelle man einen Cirkelfuß wieder in n, den andern in m. Mit

dieser unverrükten Erösnung sezze man den einen Fuß in p, steche mit dem andern in dem Bogen r p den Punkt o ab und ziehe die Linie AB aus A durch o. (§. 150. 158. 159.)

§. 189.

Aufg. *Wie sollen wir aber einen Winkel an eine bestimte Linie auf dem Felde sezzen?*

Auflösung und Beweis. Fig. XVI.

Hier wird uns entweder der Winkel BAC

1) in Graden gegeben. Alsdenn sieht man aus §. 186. II. 1. wie man mit dem Astrolabio zu verfahren. Oder

2) auf Papier gezeichnet. In diesem Fall verfahren wir eben so, wenn der Winkel zuvor nach §. 185. gemessen worden. Wir können aber auch das Papier aufs Tischgen bringen. (§. 186. I. 1.) Oder

3) wird der an die Linie aC zu tragende Winkel BAC auf dem Felde abgestekt. Hier sezze man einen Stab in m und mache um aller Verwirrung vorzubeugen mit einem andern Stab An = Am. Man messe auch mn. Auf der Linie aC mache man nun durch einen Stab ap = An. Aus p ziehe man das ein Ende der Meskette dem Maase nach = mn gegen o; aus a das andere = Am. In den Punkt o, wo sich das Maas von Am und mn berühret, sezze man einen Stab: so ist der Winkel baC = BAC. (§. 158. 159.)

§. 190.

§. 190.

Anm. Weil in dieser Auflösung, n. 3. die Linie BA mit ba parallel sein muß: (§. 173. n. 1.) so hat man auch hier eine Vorschrift, wie man mit einer Linie auf dem Felde eine parallele Linie auszustekken habe.

§. 191.

Aufg. Aus drei gegebenen Seiten einen ungleichseitigen △ zu zeichnen?

Auflösung und Beweis. Fig. IX.

Man beschreibe 1) aus dem äusersten Punkt m der Linie mo mit Erőfnung des Cirkels = mn einen Bogen gegen den Ort, wohin n fallen wird. 2) Durchschneide man diesen durch einen andern mit der Erőfnung = on aus o zu beschreibenden Bogen. 3) Ziehe man in den Durchschneidungspunkt n die Linie mn und on. Hier hat man den △, der allen, die diese Seiten haben, gleich ist. (§. 158.)

§. 192.

Zus. Wir folgern sicher hieraus, daß wir mit einer gegebenen Linie ac einen gleichseitigen △ machen können, wenn wir aus a mit Erőfnung = ac einen Bogen in b, einen gleichen aus c in b machen und die Linien ab und cb ziehen. Fig. X.

§. 193.

Zus. Was kan nun leichter sein, als mit zwei gegebenen ungleichen Seiten mn und nd den einzigen hiermit möglichen gleichschenklichten Triangel zu verfertigen: wenn wir die Linie nd

auf

auf m n aus n nach d und auch zugleich von m in d tragen? Fig. XII.

§. 194.

Aufg. Aus einer gegebenen Seite und zweien Winkeln einen Triangel zu machen?

Auflösung und Beweis. Fig. IX.

Man sezze den einen gegebenen Winkel m an den Punkt M der gegebenen Seite MO; den andern o auf den Punkt O. (§. 188.) Die Schenkeln beider Winkeln o n und m n müssen sich nothwendig in N durchschneiden, und den einzigen möglichen △ liefern. (§. 175.)

§. 195.

Aufg. Einen Triangel mit zwei gegebenen Seiten und einem Winkel zu beschreiben?

Auflösung und Beweis. Fig. IX.

Wenn uns 1) der Winkel m gegeben wird, den die beide gegebene Seiten mn und mo einschliesen: so trage man diesen Winkel an den Punkt M der Seite MO. (§. 188.) Auf dessen Schenkeln steche man aus M mit Eröfnung des Cirkels = m n die Seite MN, mit Eröfnung = mo die Seite MO ab. Und aus dem Punkt N ziehe man nach O die Seite NO: so ist der verlangte △ fertig. (§. 156.)

2) Solte uns aber der Winkel m, die anliegende mn nebst der nicht kleineren gegenüberstehenden no gegeben werden: so sezze man den Winkel

kel m an den Punkt M der Seite MN. Darauf werde der eine Fuß des Cirkels, der = no eröfnet in N gesezt und mit dem andern in dem untern Schenkel des angesezten Winkels m der Punkt O abgestochen, welcher die Linie MO bestimt, die uns den gesuchten △ bildet. (§. 182.)

§. 196.

Aufg. Ein Quadrat mit einer gegebenen Seite zu machen?

Auflösung und Beweis. Fig. XI.

Man sezze 1) an die gegebene Seite ea in a einen rechten Winkel und mache dessen Schenkel ad = ea: so hat man, wenn die Linie de gezogen würde, den einen Triangel des □. (§. 156. 160.) 2) Beschreibe man aus d einen Bogen nach b zu, mit der Eröfnung = ea. Diesen durchschneide man mit eben der Eröfnung aus e in b und ziehe die Linie db und eb: so erhalten wir den andern gleichen △, (§. 158. 160.) der mit ienem das □ schliesset. (§. 161.)

§. 197.

Zus. Werden wir also nicht ein verlangtes Rectangulum aus zwei ungleichen Seiten ac und cb zeichnen: wenn wir einen rechten Winkel an c in der Linie cb sezzen, und den angesezten Schenkel = ac machen; wenn wir ferner aus a einen Bogen gegen d = cb beschreiben, denselben in d aus b = ac durchschneiden und ad und bd ziehen? (§. 161.) Fig. V.

§. 198.

§. 198.

Zus. Sollen wir einen Rhombum mit einer Linie und einem Winkel machen: so verfahren wir wie bei dem □, (§. 196.) nur wird hier ein schiefer Winkel an die gegebene Seite gesezt. (§. 161.) Die Verfertigung eines Rhomboidis aus zwei an einander hängenden Seiten und einem Winkel, kan ebenfals von der Zeichnung des Rectanguli in nichts verschieden sein, als nur darin, daß wir einen schiefen Winkel an eine der gegebenen Seiten legen. (§. 161.)

§. 199.

Aufg. Die Entfernung zweier Orten C und B zu messen, zu deren iedem man aus A kommen kan?

Auflösung und Beweis. Fig. XVII.

Man erwähle 1) den Stand A und sezze dahin einen senkrechten Stab.

2) Messe man die Linie AB und verlängre sie rükwärts bis in E, dahin ein Stab gesezt wird, daß AE = AB.

3) Messe man auch AC und trage sie gerad zurük, daß AD = AC.

4) Messe man die Linie DE. Diese ist = CB der Entfernungslinie. (§. 155. 156.)

§. 200.

Aufg. Wie werden wir aber aus N die Entfernung eines Orts O, dazu wir nicht kommen können, messen?

Auflö-

Auflösung und Beweis. Fig. XVIII.

Man erwähle sich 1) einen Ort M, dahin ein Stab gestekt wird; messe MN und trage sie gerad zurük in P, welchen Punkt man mit dem zweiten Stab bemerket, daß also MP = MN.

2) Trage man den Winkel N an P in der Linie MP und bemerke dessen Schenkel mit dem dritten Stab T. Oder, wenn man dieses vermeiden will: so wird nur ein Stab in S gestekt, die gemessene Linie SM aus M nach T getragen. Die durch den Punkt T aus P lauffende gerade Linie macht sowol auf diese (§. 156.) als iene Art (§. 189.) den Winkel P = N.

3) Wo sich nun die verlängerte Linie MO, und der Schenkel PT durchschneiden, da wird der fünfte Stab eingesezt, welches der Punkt Q ist, den wir finden, wenn uns der Stab Q die Stäbe in T und P sowol als in M und O verdekket. (§. 184.) Nun ist

4) PQ = NO. (§. 175. 159.) Und diese Linie kan man messen, um die gesuchte Entfernung NO zu erfahren.

§. 201.

Lehrs. Zwei Parallelogrammen von gleichen Höhen und Grundlinien sind sich gleich.

Beweis. Fig. XIX.

In den beiden △ abe und dcf, ist ab = cd, bc = ef (§. 177.) und ae = df. (§. 177. 5. 4.) Folglich ist der △ abe = △ dcf. (§. 158.)

Sol-

Solte nun nicht auch die Fläche abgd = gefc (§. 6. 4.) und das Parallelogram abcd = befc sein müssen? (§. 5. 4.) welche beide gleiche Grundlinie bc und Höhe ab haben. (§. 179.)

§. 202.

Zus. Solten nun nicht zwei Triangeln ABb und aBb, die gleiche Höhe AB und Grundlinie Bb haben, gleich sein? (§. 180. 6.) Und wird nicht ein △ die Helfte eines Parallelograms sein, das gleiche Höhe und Grundlinie mit demselben hat? (§. 180.) Fig. XXXI.

§. 203.

Lehrs. Das □, welches man in einem rechtwinklichten △ auf bh, die Hypotenuse zeichnet, ist den beiden □ auf den Cathetis be und eh gleich.

Beweis. Fig. XX. n. 1.

Ziehen wir die Linien ae und ch: so sind die △ abe und bhc gleich: (§. 156.) weil bc = be, ba = bh (§. 141.) und der Winkel hbc = abe (§. 5. 4.) Es ist aber △ bch die Helfte des □ bcde, △ abe die Helfte vom Parallelogram aklb, welches die aus e mit ab parallel gezogene Linie lk macht. (§. 202.) Folglich muß auch das ganze Parallelogr. aklb dem ganzen □ bcde gleich sein. (§. 5. 4.)

Wenn wir nun auch die Linie ie und bg zögen: so würde auf gleiche Art erwiesen werden, daß das □ hefg dem noch im □ der Hypotenuse übrigen Parallelogr. iklh gleich seie. Wird nun nicht

nicht das ganze □ auf der Hypotenuse denen beiden auf den Cathetis gleich sein müssen? (§. 4. 5.)

Aus dem §. 201. fliesset nach der Fig. XX. n. 2. noch ein anderer sehr leichter Beweis.

§. 204.

Anm. Auf diese Art wird es leicht ein Quadrat zu finden, das so gros ist als zwei andere, A und B: wenn wir die Seite des ersten A, zu einem Catheto; die Seite des zweiten B, zum andern annehmen; und auf der Hypotenuse ein Quadrat z aufrichten. Ja wenn wir die Seite von diesem gefundenen Quadrat z aufs neue zu einem Catheto, die Seite eines dritten C zum andern erwählen und auf die Hypotenuse wieder ein Quadrat y sezzen: so wird dieses Quadrat y, denen dreien A, B, C gleich sein. u. s. f.

§. 205.

Aufg. Wie wird ein Parallelogram aus einem gegebenen Punkt f in zwei gleiche Theilen zerschnitten?

Auflösung. Fig. V.

Man darf nur fd, auf cb aus c in e tragen und die Linie fe ziehen.

Beweis.

Der △ acb = abd (§. 177.) und △ agf = egb. (§. 168. 177. 6. 175.) Also aceg = gfdb (§. 6.) und wieder acef = efdb. (§. 5.)

§. 206.

Lehrs. Die Sehnen von gleichen Bogen in einem oder gleichen Cirkeln sind einander gleich; und so müssen sich auch hier die Bogen von gleichen Sehnen gleichen.

Beweis. Fig. XI.

Wenn die Bogen aid und dhb gleich sind und die Radien ca, cd und cb gezogen werden: so muß c = x sein. (§. 149. 145.) Werden nun auch die Sehnen ad und db gezogen: so wird △ acd = dbc (§. 150. 156.) ia die Sehnen ad und db gleich sein. (§. 159.)

Sind aber die Sehnen ad und db gleich und die Radien ca, cd, cb werden gezogen: so muß △ adc = dbc (§. 158.) der Winkel c = x (§. 159.) und daher der Bogen aid = dhb sein. (§. 149. 145.)

§. 207.

Zus. Weil nun gleiche Bogen gleiche Sehnen erfodern: so müssen die Chorden in ieder Helfte des Cirkels immer gröser werden, ie näher sie dem Mittelpunkt kommen; ia der Diameter muß die gröste Chorde sein. (§. 143.)

§. 208.

Aufg. Einen Bogen adb in zwei gleiche Theilen zu zerschneiden.

Auflösung. Fig. XXI.

Man mache 1) aus a und b Durchschnitte in e und c nach §. 163. oder auch aus a und b in c und d. 2) Ziehe man die Linie dc oder de: so ist der Bogen ad = db.

Beweis.

In beiden Fällen wird die Sehne ab in zwei gleiche Theilen zerschnitten; und bei g werden rechte

rechte Winkeln erzeuget. (§. 163.) Also muß △agd = gdb (§. 156.) und die Sehne ad = db (§. 159.) ia der Bogen ad = db sein. (§. 206.)

§. 209.

Zus. Muß nun nicht iede perpendiculare Linie, welche die Sehne in zwei gleiche Theilen theilet, auch den Bogen in zwei gleiche zergliedern?

§. 210.

Lehrs. Die senkrechte Linie, welche die Sehne in zwei gleiche Theilen theilet, geht durch den Mittelpunkt des Cirkels.

Beweis. Fig. XXI.

Weil nach der Bedingung ag = gb; ge sich selbst gleich; (§. 4.) und bei g rechte Winkeln: (§. 134.) so muß auch die Sehne ae = be; (§. 156. 159.) und demnach der Bogen ae = be sein. (§. 206.) Nun ist aus gleicher Ursach der Bogen ad = db. (§. 209.) Muß also nicht der Bogen ebd = ead sein? (§. 5.) Es kan daher keine Chorde gröser sein als ed. ed ist also der Diameter, (§. 207.) und geht durch den Mittelpunkt des Cirkels, in welchem die Sehne ab gezeichnet ist. (§. 143.)

§. 211.

Lehrs. Die perpendiculare Linie, die aus dem Mittelpunkt des Cirkels auf die Sehne sinkt, theilt Sehne und Bogen in zwei gleiche Theilen.

Beweis. Fig. XXI.

Es ist ca = cb (§. 150.) cg sich selbst gleich (§. 4.) und bei g rechte Winkeln. (§. 134.) Wird also nicht △ acg = cgb (§. 183.) und ag = gb (§. 159.) der Bogen ad = db sein? (§. 209.)

§. 212.

Aufg. Durch drei gegebene Punkten, die nicht in gerader Linie liegen, einen Cirkel zu beschreiben?

Auflösung und Beweis. Fig. XXII.

Man mache 1) sowol aus a und b Durchschnitte in f und g, als auch aus d und b, in h und e; und ziehe 2) fg und he: so ist gf senkrecht auf ab, he auf db und beide Theilen ihre Sehnen in zwei gleiche Theilen. (§. 163.) Muß also nicht ihr gemeinschaftlicher Punkt selbst der Mittelpunkt sein, daraus man den Cirkel beschreiben kan? (§. 210.)

§. 213.

Lehrs. Ein Winkel an der Peripherie, der mit einem andern am Centro auf einem Bogen steht, ist nur halb so gros als dieser.

Beweis. Fig. XXIII. XXIV. XXV.

Wenn 1) der Winkel s an der Peripherie den Mittelpunkt c in seinem Schenkel hat: so ist o = r † s. (§. 169.) Es ist aber r = s. (§. 165. 150.) Also muß s die Helfte von o sein.

2) Kan der Winkel an der Peripherie das Centrum c zwischen seinen Schenkeln haben. Hier ist

ist sowol s die Helfte von o als m die Helfte von x. (n. 1.) Muß nun nicht s † m oder bae die Helfte von o † x oder bce sein?

3) Endlich wird noch der Winkel an der Peripherie das Centrum c auser seinen Schenkeln haben können. Hier ist eab die Helfte von ecb; (n. 1.) o ist aber auch die Helfte von x: (n. 1.) m wird daher die Helfte von n ausmachen.

§. 214.

Zus. Wird nun nicht das Maas des Winkels s an der Peripherie die Helfte des Bogens bd, darauf seine Schenkeln ruhen, sein müssen? (§. 145.)

§. 215.

Zus. Wird nicht ein ieder Winkel adb, der auf einem halben Cirkel stehet, die Helfte dieses halben Cirkels, oder die Helfte von 180° (§. 144) d. i. 90°, oder einen Quadranten zum Maas haben, und daher ein rechter Winkel sein? (§. 153.) Fig. XI. So muß auch der Winkel aeb, der auf einem kleineren Bogen adb, als ein halber Cirkel ist, ruhet, ein spizziger; und der Winkel adb, der auf einem gröseren Bogen aeb, als ein halber Cirkel ist, stehet, ein stumpfer sein. (§. 136. 145.) Fig. XXI.

§. 216.

Zus. Jezt sind wir in den Stand gesezt einen Perpendikel auf eine andere Art als §. 167. auf dem Ende b einer Linie ab aufzurichten: wenn wir nemlich den Cirkel aus dem Ende b bis zu einem beliebigen Punkt c aufthun, diesen

Radium aus c in d, und ebenfals auf der gerad verlängerten Linie d c, als dem Diameter, aus c in e tragen; endlich aber eine gerade Linie aus b durch e ziehen. (§. 215. 134.) Ein sicheres Mittel einen Winkelhaken zu prüfen. Fig. XXVII.

§. 217.

Zus. Alle Winkeln o, n, m, r an der Peripherie, die auf einem Bogen a e b stehen, werden gewis einerlei Gröse mit dem Centriwinkel y des halben Bogens a e b haben, und gleich sein. (§. 149.) Fig. XXVI.

§. 218.

Zus. Solten nicht auch zwei Winkeln an der Peripherie a d b und a e b, die mit ihren Schenkeln in a und b zusammen stossen, die Helfte des ganzen Cirkels, d. i. 180° ausmachen? Uiberdas können sie nur eine Sehne ab, darauf sie stehen, haben. Fig. XXI.

§. 219.

Aufg. Wie finden wir die Summe aller Winkeln in einem Vielek.

Auflösung.

Mit der Anzahl der Seiten multiplicire man 180 und von dem Produkt ziehe man 360 ab. Die Differenz ist die Summe aller Winkeln.

Beweis. Fig. XXVIII.

Es ist möglich ein iedes Polygon aus einem angenommenen Punkt a in so viele Triangeln zu zerfällen als es Seiten hat. Die Winkeln eines ieden derselben müssen 180° ausmachen. (§. 169.)

Wer-

Werden nun 180 mit der Anzahl der Seiten multiplicirt: so kommen nicht nur alle Winkeln am Umfang des Vielekkes, d. i. die Polygonwinkeln heraus, sondern auch die Winkeln in den Triangeln am Mittelpunkt, welche zusammen 360 ° halten (§. 146.) und nicht zu den Polygonwinkeln gehören. Ziehen wir nun diese 360 Gr. von dem Produkt ab: so bleibt die rechte Summe aller Winkeln.

§. 220.

Aufg. Den Polygonwinkel zu einem regulären Vielek zu entdekken?

Auflösung.

Man dividire nur 360 mit der Anzahl der Seiten, und ziehe den Quotient von 180 ab: so bleiben die Grade des Polygonwinkels. Z. E.

6) 360 (60 ° der Polygonwinkel im Sechsek.

Beweis. Fig. XXIX.

Hier müssen alle Winkeln am Mittelpunkt, wenn das reguläre Polygon in Triangeln getheilt wird, gleich sein. (§. 139. 206. 145. 149.) Deren sind so viele, als das Polygon Seiten hat. (§. 219.) Werden nun die 360 ° um den Mittelpunkt c mit der Zahl der Seiten dividirt, so muß der Winkel m am Centro eines ieden △ als ein Quotient heraus kommen. Wird dieser von 180 Gr. abgezogen, so müssen die beiden übrigen Winkel x und y übrig bleiben. (§. 171.) Aber es ist u = y, (§. 150. 158. 165.) also x † u = x † y. (§. 5.) x † u ist der Polygon-

winkel, den man also erhält, wenn iener Quotient m von 180° abgezogen wird.

§. 221.

Zus. Es ist demnach in einem regulären Polygon x oder y die Helfte des Polygonwinkels.

§. 222.

Aufg. Wie beschreiben wir nun ein reguläres Polygon in einem Cirkel?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXIX.

Man dividire 1) mit der Zahl der verlangten Seiten 360: so erhält man den Winkel m aller △ des Polygons. (§. 220.)

2) Sezze man diesen m an den Mittelpunkt, damit der Bogen a e b abgeschnitten werde und man die Seite a b ziehen könne, die man nun nur in dem ganzen Cirkel herumträgt.

§. 223.

Zus. Auf eine Seite a b zeichnen wir ein reguläres Polygon: wenn wir die Helfte des gesuchten Polygonwinkels (§. 220.) auf dieser Seite sowol an b als a sezzen, (§. 121.) und aus dem Durchschneidungspunkt c mit dem Radio c b den Cirkel beschreiben, darin die Seite a b kan herumgetragen werden. Fig. XXIX.

§. 224.

Lehrs. Die Seite eines Sechsekkes ist dem Radio des Cirkels gleich, darin es beschrieben werden kan.

Beweis. Fig. XXIX.

Der Winkel m am Mittelpunkt c macht im

Sechs-

Sechsek 60 Gr. aus. (§. 220.) Aber es ist x = y. (§. 220.) Jeder Winkel hat also 60 Gr. (§. 169.) und im Sechsek ist die Seite ab = cb dem Radio. (§. 181.)

§. 225.

Zus. Wir machen daher ein reguläres Sechsek, in einem Cirkel, wenn wir den Radium in der ganzen Peripherie herum tragen; und auf der Seite ab, wenn wir aus a und b Durchschnitte in c = ab machen, aus c den Cirkel mit dem Radio = ab beschreiben und in demselben ab herumtragen.

§. 226.

Lehrs. Ein iedes reguläres Vielek ist einem Triangel gleich, dessen Grundlinie dem Perimeter des Vielekkes, und dessen Höhe der Höhe eines der gleichen Triangeln, darin das Polygon zertheilt wird, gleich ist.

Beweis. Fig. XXXI.

Ein iedes reguläres Polygon bestehet aus so vielen gleichen △, als es Seiten hat. (§. 219. 220.) Z. E. ein □, welches die Stelle eines Polygons aus Mangel des Raums auf der Kupfertafel vertretten mag, besteht aus den vier △ aBb = ABb, abc = Abc, acd = Acd und adC = AdC. (§. 202.) Alle sind wieder gleich einem △ ABC (§. 4.) der gleiche Grundlinie mit allen und gleiche Höhe mit einem derselben hat.

§. 227.

Zus. Je mehr Seiten ein Polygon hat, desto

kleiner müssen sie werden; (§. 207.) ia wenn deren unendlich viele sind, so müssen sie endlich in der aus dem Mittelpunkt des Vielekkes beschriebenen Peripherie eines Cirkels verschwinden und der Perimeter in eine Peripherie verwandelt werden. Der Cirkel wird daher aus unendlich vielen △, deren Höhe dem Radio gleich ist, bestehen, und ein reguläres Vielek vorstellen. (§. 220.) Wird deswegen nicht auch ein Cirkel einem △ gleich sein müssen, dessen Höhe dem Radio und dessen Grundlinie der Peripherie gleich ist. (§. 226.)

§. 228.

Zus. Hieraus folget, daß der Ausschnitt acbea einem △ def gleich seie, dessen Höhe dem Radio ac und dessen Grundlinie dem Bogen aeb gleich ist. Ja aus eben dem Grund muß die Differenz des △ def und des △ acb dem Abschnitt abea gleich sein. Fig. XXIX. XXX.

§. 229.

Aufg. Wie sollen wir eine Figur zeichnen, dazu uns alle Seiten gegeben, aber drei Winkeln verschwiegen werden.

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXVI.

Man sezze 1) an A in der gegebenen Seite AB den Winkel EAB und trage auf dessen Schenkel aus A in E die gegebene Seite AE.

2) An B sezze man den andern gegebenen Winkel ABC und trage auf dessen Schenkel aus B in C die gegebene Seite BC.

3) End-

3) Endlich ziehe man aus C mit der Cirkeleröfnung = CD einen Bogen, den man aus E mit Eröfnung = ED in D durchschneidet, um mit der Seite ED und CD die Figur schliessen zu können, welche die verlangte vorstellen muß. (§. 149. 148.)

§. 230.

Anm. Eben dieses können wir thun, wenn uns alle Seiten und drei Diagonalen weniger als Seiten sind, gegeben werden. Ja auch alsdenn, wenn wir alle Winkeln ohne einen und alle Seiten weniger zwei empfangen.

Dritter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 231.

Lehrs. Wenn von einer in lauter gleiche Theilen getheilten Linie AB aus allen Theilungspunkten parallele Linien gezogen werden: so theilen diese eine darin gelegte Linie CD in eben so viele unter sich gleiche Theilen.

Beweis. Fig. XXXII.

Man lasse eine senkrechte Linie aus E in e, aus F in f sinken, so wird Ee = Ff, weil die Linie AB in gleiche Theilen zergliedert und diese senkrechte Linien zwischen parallelen Linien stehen. (§. 137.) Bei e und f sind rechte Winkeln (§. 134.) o = x (§. 168. n. 2.) n = u (§. 172.) und

und also EF $=$ FG. (§. 175. 159.) Eben so lässet es sich darthun, daß alle übrige Theilen CE $=$ EF und FG $=$ GD seien.

§. 232.

Zus. Ein sicheres Mittel eine Linie in gleiche Theilen zu zergliedern. Ist die einzutheilende kleiner, als die, durch welche sie eingetheilt wird, so leget man diese so schief, als man es nötig findet.

§. 233.

Zus. Hieraus lässet sich auch leichtlich begreifen, daß wir ein Parallelogram in verlangte gleiche Theilen zergliedern, wenn wir eine Seite desselben in die bestimte gleiche Theilen theilen und aus den Theilungspunkten mit der anliegenden Seite parallele Linien ziehen. (§. 201.) Wir lernen auch hier einen △ in verlangte gleiche Theilen zergliedern. Dann wir dörfen nur dessen Grundlinie in die bestimte gleiche Theilen zerschneiden, und in die Theilungspunkten aus der Spizze Linien ziehen. (§. 202.)

§. 234.

Lehrs. Sind in zweien Triangeln alle Winkeln in gehöriger Ordnung genommen einander gleich: so stehen alle Seiten derselben in einer geometrischen Proportion.

Beweis. Fig. XXXIII. n. 1. 2. 3.

1) Weil in den △ ABC und abc, A $=$ a: (vermöge der Bedingung) so kan man sie so auf einander schieben, daß ac auf AC, und ab auf

AB

AB liegen muß. (§. 148. 147.) Weil ferner c = C und b = B: so muß bc mit BC parallel sein. (§. 173. n. 2.) Es ist möglich die Linie AB so in gleiche Theilen zu theilen, daß ein Theilungspunkt in b falle. (§. 127.) Es ist möglich aus allen Theilungspunkten parallele Linien mit BC, deren eine bc werden muß, weil sie schon mit BC parallel ist, nach AC zu ziehen. (§. 127) Diese müssen aber AC in eben so viel gleiche Theilen, als AB hat, zergliedern. (§. 231.) Und daher wird ab so viele gleiche Theilen haben (hier z. E. 6) als ac; und AB so viele (hier 8) als gleiche Theilen in AC sind. Es wird sich demnach verhalten AB : ab = 8 : 6. Auch verhält sich AC : ac = 8 : 6. Muß sich nun nicht verhalten AB : ab = AC : ac? (§. 100.) ja AB : AC = ab : ac? (§. 105.)

2) Es ist b = B. Kan also nicht b auf B gerükt werden, daß bc auf BC und ba auf BA falle? (§. 148. 147.) Nun ist auch a = A, c = C. Daher muß ac mit AC parallel sein, (§. 173. n. 2.) und BC so wie AB (n. 1.) getheilt werden können, daß sich hier verhält BA : ba = 6 : 4; ingleichen BC : bc = 6 : 4. Also BA : ba = BC : bc (§. 100.) und BA : BC = ba : bc. (§. 105.)

3) Endlich ist c = C. Man rükke nun c auf C: so ist alles wie n. 1. und 2. beschaffen; und hier verhält sich CA : ca = 3 : 2; CB : cb = 3 : 2. Also CA : ca = CB : cb (§. 100.) und CA : CB = ca : cb. (§. 105.) Es stehen

hen also hier alle drei Seiten nach gehöriger Ordnung, d. i. iedesmal dieienige, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, in ihrer Proportion.

§. 235.

Zus. Haben wir nun nur entdekt, daß zwei Winkeln in zweien Triangeln ABC und abc gleich sind: so wissen wir schon, daß alle Seiten in gehöriger Ordnung proportional sind. (§. 172.) Fig. XXXIII. n. 4.

§. 236.

Zus. Wenn in einem △ ABC eine Linie fe mit der Grundlinie BC parallel gezogen wird, so sind alle Winkeln in beiden Triangeln gleich (§. 168.) und iene Proportionen (§. 234.) müssen auch hier stat finden. Fig. XXXIII. n. 4.

§. 237.

Lehrs. Findet sich in iedem von zweien Triangeln bei zweien Seiten eine Proportion und die von ihnen eingeschlossene Winkeln sind gleich: so müssen alle Seiten, wie §. 234. erwiesen worden, proportional sein.

Beweis. Fig. XXXIII. n. 1.

Es seie AB:ab = AC:ac und a = A. Man rükke a auf A: so wird ab auf AB, ac auf AC sinken. (§ 148. 147.) Man theile nun AB in so viel gleiche Theilen bis einer in b fält, und ziehe wie §. 234. Parallelen, daß sich hier verhalte AB:ab = 8:6. Da sich nun die Linie ab in b endigt; so wird sich ac entweder auch in dem Punkt c der mit BC gezogenen parallelen Linie

bc

b c endigen; und dadurch die Seite b c mit BC parallel sein, oder nicht. Ist dieses: so muß b c entweder hinaufwärts nach A einen andern Theil abschneiden, oder einen Theil herab nach C sinken. (§. 127. 231.) Im ersteren Fall wird sich verhalten AC : ac = 8 : 5; im andern = 8 : 7. Also nicht wie AB : ab. Das wiederspricht aber der angenommenen Bedingung. Folglich muß b c mit BC parallel sein. Und auf die Art wird nun wieder alles, was §. 234. erwiesen worden, auch hier statt finden. (§. 236.)

§. 238.

Lehrs. Von dem ordnungsmäsigen proportional sein aller Seiten, lässet sich auch auf eine solche Gleichheit aller Winkeln schliesen.

Beweis. Fig. XXXIII. n. 2.

Vermöge der Bedingung mag sich verhalten die auf AB gelegte Seite ab : AB = 4 : 6. So muß sich also auch verhalten bc : BC = 4 : 6. bc wird sich demnach in der Theilungslinie ac endigen müssen. Sie endigt sich nun entweder auf der Linie BC, oder nicht. Ist dieses: so fält sie entweder gegen d oder e. Weil sich aber nur verhält die Linie *ac* : AC = 2 : 3 (§. 234. n. 3.) oder wie 4 : 6, (§. 96.) so kan sich in beiden Fällen, wenn ac = ad oder = ae angenommen würde, nicht verhalten ac : AC = 4 : 6; welches doch sein muß, damit sich der Bedingung gemäs verhalte cb : CB = ca : CA. Es muß

sich

sich also bc auf der Linie BC, d. i. in c endigen. Auf diese Art ist b = B (§. 147. 148.) und noch überdas, nach der Beding. ba : BA = bc : BC. Es muß daher ac parallel mit AC, (§. 237.) ja alle Winkeln in beiden Triangeln ABC und abc in ihrer Ordnung gleich sein. (§. 168. n. 2.)

§. 239.

Zus. Die bisher angeführte Proportionen können nicht nur auf mancherlei Weise verändert, (§. 104.) sondern auch aus dem §. 234. noch mehr andere hergeleitet werden. Z. E. AB : bB = AC : cC, ab : bB = ac : cC und dergleichen.

§. 240.

Erkl. Die ordnungsmäsige Gleichheit aller Winkeln und das gehörige proportional sein aller Seiten in zweien Triangeln heist die Aehnlichkeit derselben. Und hierauf wird die Aehnlichkeit aller Figuren ankommen, weil keine ist, die nicht solte aus △ zusammen gesezt sein. Das Zeichen derselben ist ∽.

§. 241.

Aufg. Wie finden wir zu zweien gegebenen Linien c und b die dritte proportionirte Linie?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXIV.

Man erwähle sich 1) einen Winkel A und trage aus A nach b die Linie b; die Linie c sowol aus A in C als in B.

2) Darauf ziehe man die Linie bC und mit ihr

ihr parallel aus B die Linie Bd: so wird Ad die dritte proportionirliche Linie sein. (§. 236.)

§. 242.

Aufg. Wie entdekken wir zu drei Linien b, c und d die vierte proportionirte Linie.

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXIV.

Man erwähle sich 1) einen Winkel A und trage die Linie b aus A in b, die Linie c aus A in C, die Linie d aus A in D.

2) Ziehe man die Linie bC und mit ihr parallel aus D die Linie DF: so muß AF die verlangte vierte proportionale Linie sein. (§. 236.)

§. 243.

Aufg. Wie werden wir endlich zu zweien gegebenen Linien d und n die mitlere proportionirliche Linie entdekken.

Auflösung. Fig. XXXV.

Man sezze 1) in einer geraden Linie die beiden gegebenen Linien also an einander, daß d aus a nach d, n aus d nach n getragen werde.

2) Suche man die Mitte von an nemlich c (§. 164.) und beschreibe aus c über an einen halben Cirkel.

3) Richte man auf dem Punkt d, da sich beide Linien berühren, eine senkrechte db bis an die Peripherie auf. Diese ist die mitlere proportionale Linie.

Beweis.

Wenn die Linien ab und bn gezogen werden: so ist bei b der Winkel abn ein rechter. (§. 215.) Zieht man nun im △ anb den rechten Winkel abn und den Winkel u von 180° ab: so muß m übrig bleiben. (§. 171.) Und wird im △ bdn der rechte Winkel x nebst eben diesem u von 180° abgezogen, so bleibt o übrig. (§. 171.) Also ist m = o. (§. 6.) Nun ist auch in den beiden △ adb und dbn, x = y. (§. 153.) Daher ist △ adb ∽ △ dbn (§. 235. 240.) und kan o auf m gerükt werden, daß man augenscheinlich siehet, es verhalte sich dn : db = db : da. (§. 234. n. 2.)

§. 244.

Aufg. Eine Linie AD nach der Proportion einer andern AF einzutheilen?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXIV.

Man sezze 1) AD mit dem Punkt A an AF und verbinde die Endpunkten D und F durch die Linie DF.

2) Ziehe man aus allen Theilungspunkten der Linie AF parallele Linien mit DF nach AD: so ist z. B. AD : bD = AF : CF. (§. 236.)

§. 245.

Lehrs. Wie sich die Radien der Cirkeln verhalten, so verhalten sich auch ihre Peripherien.

Beweis. Fig. XXXIII. n. 4.

Wenn wir sezzen die Bogen BC und fe wären

ren so kleine Stůklein der Peripherie, daß sie sich nicht merklich mehr von geraden Linien unterschieden: (§. 227.) so muß sich, weil sie parallel sind (§. 150. 6. 137.) verhalten, Rad. AB: Rad. Af = BC : fe. (§. 236.) Es verhält sich aber das Stůklein BC zu seiner Peripherie, wie fe zur seinigen. (§. 144. 145.) Also ist BC : fe wie iene Periph. BCg &c. zu dieser feh &c. (§. 105. oder §. 96.) Wird sich nun nicht auch verhalten Rad. AB: Rad. Af oder ein Radius zum andern; wie die Periph. von einem, zur Per. vom andern. (§. 100.)

§. 246.

Zus. Wird sich nun nicht ein Diameter A zum andern B verhalten, wie die Per. des A zur Per. des B? (§. 96. 150.) und wird sich nicht ein Diameter zu seiner Periph. verhalten, wie alle übrige zu der ihrigen? (§. 105.)

§. 247.

Anm. Man ist schon lang mit Entdekkung dieses Verhältnisses beschäftigt gewesen. Doch hat sich das Licht der mathematischen Wahrheiten noch nicht vollkommen auf dasselbe ausgebreitet. Nach mühsamer Ausrechnung hat Ludolph von Cöln gefunden, daß sich der Diameter zur Peripherie beinahe verhalte, wie 100 000 000 000 000 000 000 zu 314 159 265 358 979 323 846; oder wenn wir nur die drei ersten Zahlen beibehalten, wie 100 zu 314. Archimedes hat uns schon ein Verhältnis, iedoch ein unvollkomneres, wie 7 zu 22, hinterlassen. Ein anderes hat Adrianus Metius, nemlich wie 113 zu 355, geliefert. Das erste wird gemeiniglich angenommen.

§. 248.

Lehrs. Alle Parallelogrammen verhalten sich wie die Produkten aus ihren Höhen und Grundlinien.

Beweis. Fig. XXXVII.

Man sezze das Parallelogram abcd mit der Seite cd auf CD, daß d auf D liege. Nun theile man die Linie CD also in gleiche Theilen, daß ein Theilungspunkt in c falle; und ziehe aus denselben nach AB und ab parallele Linien: so wird ABCD in 8 unter sich gleiche Parallelogrammen, abcd in 4 unter sich gleiche zergliedert. (§. 233.) Man theile auch Db in so viel gleiche Theilen, bis ein Theilungspunkt in B sinke; und ziehe aus iedem eine Parallele nach ac und AC: so wird iedes Parallelogram in ABCD aufs neue in 4 gleiche Parallelogrammen; iedes in abcd in 6 dergleichen zerschnitten. (§. 233.) ABCD wird also 8 . 4 = 32 gleiche Theilen enthalten; da abcd von eben solchen gleichen Theilen 4 . 6 = 24 hat. Daher verhält sich ABCD : abcd = 32 : 24. Aber das Produkt aus Höhe und Grdl. in ABCD verhält sich auch zum Produkt aus Höhe und Grdl. in abcd wie 32 : 24. Also verhalten sich beide Parallelogrammen wie die Produkten aus ihren Höhen und Grundlinien. (§. 100.) Und dieses kan eben so von allen andern erwiesen werden. Parallelogrammen verhalten sich demnach wie die Produkten aus ihren Höhen und Grund-

Grundlinien, d. i. sie haben so viel gleiche Theilen, als das Produkt aus ihren in gleiche Theilen zergliederten Höhen und Grundlinien hat.

§. 249.

Zus. Wenn wir die Linie cb zögen, so hätten wir einen △ = $\frac{1}{2}$ abcd. (§. 180.) Also = $\frac{1}{2}$ Prod. aus cd und db. (§. 248.) Daher werden sich die Triangeln verhalten, wie die halben Produkten aus ihren Höhen und Grundlinien; und ieder wird so viel gleiche Theilen haben, als das halbe Produkt aus seiner in gleiche Theilen zergliederten Höhe und Grundlinie enthält.

§. 250.

Zus. Solten sich nun nicht Parallelogrammen von gleichen Höhen wie die Grundlinien; von gleichen Grundlinien wie die Höhen verhalten? (§. 97.) Und wird nicht eben dieses von den Triangeln wahr sein? (§. 97. 96.)

§. 251.

Aufg. Wir müssen einen veriüngten Maasstab machen lernen.

Auflösung. Fig. XXXVIII.

Man richte 1) auf AD die perpendiculare Linien AC und DF auf.

2) Theile man AD in 10 gleiche Theilen und ziehe aus iedem Theilungspunkt Parallelen mit AC.

3) Mache man AB = DE und theile sowol AB als DE in 10 gleiche Theilen.

4) Ziehe man die Linie aus D in 1 auf AB und so fort aus allen Theilungspunkten mit D 1 parallele Linien bis man in den Punkt B gekommen.

5) Kan man die Linien AB und DE nebst ihren Parallelen durch BE nach CF und so weiter auf dem zu machenden Maasstabe forttragen. Wenn nun AB eine Ruthe vorstellen soll: so ist A 1 ein Schuh, A 2 zwei Schuh; 1 a an der Linie AD ein Zoll, 2 b zwei Zoll, u. s f.

Beweis.

Auf AC verhält sich A 1 : AB = 1 : 10. A 1 ist also $\frac{1}{10}$ von AB (§. 95.) und folglich ein Schuh, wenn AB eine Ruthe ist. (§. 130.) Nun ist auch a 1 mit A 1 parallel gezogen. Folglich verhält sich D 1 : DA = 1 a : A 1. (§. 236.) Aber es ist D 1 : DA = 1 : 10. Also auch 1 a : A 1 = 1 : 10 (§. 100.) und 1 a wird $\frac{1}{10}$ von A 1 sein. (§. 95.) A 1 war ein Schuh. Muß nun nicht 1 a ein Zoll, 2 b zwei Zoll, u. s. f. sein? (§. 130.)

§. 252.

Aufg. Wie werden wir die Entfernung zweier Orten B und C, zu denen man aus A kommen kan, zu messen haben?

Auflösung. Fig. XXXIX.

Man messe 1) aus dem so nahe als möglich bei

bei den Orten B und C erwählten Stande A den Winkel BAC (§. 186. 187.) und die beiden Linien AB und AC. §. 184.)

2) Trage man AB nach dem veriüngten Maase aus a in b; AC auch also aus a in c.

3) Ziehe man die Linie cb. Diese macht so viel im veriüngten Maase aus als BC im grosen.

Beweis.

Man hat der Linie ac eben so viel Theilen vom veriüngten Maase gegeben als AC im grosen hatte. So ist man auch mit ab verfahren. Wenn nun, z. B. das grose Maas 100mal gröser als das veriüngte wäre; und AC 9° betrüge: so würde sich verhalten AC : ac = 900 : 9; dividirt mit 9, wie 100 : 1. (§. 96.) AB mag 11° ausmachen: so verhält sich AB : ab = 1100 : 11; dividirt mit 11, wie 100 : 1. (§. 96.) Also verhält sich auch AC : ac = AB : ab. (§. 100.)

Der Winkel a ist aber beiden △ abc und ABC gemein. Wie sich daher verhält ab : AB = bc : BC. (§. 237.) Aber es ist ab : AB, wie das veriüngte Maas zum grosen. bc wird demnach auch eben so viel Theilen im veriüngten Maas haben müssen, als BC im grosen hat.

§. 253.

Anm. Wenn man hier mit dem Astrolabio oder der Boussole misset: so ist es nötig einen Winkel aus freier Hand zu zeichnen, der ohngefehr wie der gemessene aussieht. Diesen Winkel bezeichne man wie bei dem Tisch-

gen und schreibe die Graden desselben auf. Eben so trägt man die Seite AC auf dem Schenkel aus a in c und merket zugleich ihr Maas an. So verfährt man auch mit AB. Ja so macht man es mit allen gemessenen Winkeln und Seiten aller Figuren. Nach diesem bilden wir den Winkel a, oder mehrere, sorgfältigst mit einem guten Transporteur, tragen auf seine Schenkeln das grose Maas der Seiten nach dem verjüngten Maasstabe; ziehen endlich die sich nun von selbst bestimmende Linie cb, oder auch in andern Fällen mehrere dergleichen und messen sie nach dem verjüngten Maase aus.

§. 254.

Aufg. Die Entfernung zweier Orten B und C zu messen, zu deren einem C man nur aus einem erwählten Stande A messen kan.

Auflösung. Fig. XL.

Man erwähle 1) den Stand also, daß der Winkel B einem rechten so nahe, als möglich ist, komme, und messe den Winkel CAB, dadurch also die beiden Schenkeln ab und ac angesezt werden.

2) Messe man die Linie AC und trage sie nach dem veriüngten Maase aus a in c.

3) Werde nun das Instrument in C gesezt, daß c senkrecht auf C falle und ac in AC liege; welches geschieht, wenn man durch das an ca genau angelegte Diopterlinial den Stab A gehörig erblikket. Hier messe man den Winkel BCA: so wird der angesezte Schenkel cb den Schenkel ab in b durchschneiden und den △ abc

abc schliesen; die Seite bc aber das veriüngte Maas von BC haben.

Beweis.

Die Winkeln c und a sind beiden △ abc und ABC gemein. Es ist also ac : AC = cb : CB. Aber ac verhält sich zu AC, wie das veriüngte Maas zum grosen. (§. 252. Bew. 1) Muß nicht deswegen auch cb so viel Theilen im veriüngten Maas als CB im grosen haben? (§. 100.)

§. 255.

Aufg. Wie messen wir die Entfernung zweier Orten C und D, zu deren keinem man kommen kan?

Auflösung. Fig. XLI.

Es werde 1) in einem erwählten Ort B ein Stab gesezt und aus dem andern A (§. 254. n. 1.) die Winkeln BAD und BAC gemessen und dabei die Schenkeln ad, ac und ab angesezt.

2) Messe man die Standlinie AB und trage sie nach dem veriüngten Maas aus a nach b.

3) Sezze man das Instrument in B nachdem ein Stab in A zurükgelassen, daß b sowol senkrecht auf B stehe, als auch ba in BA liege; und messe die Winkeln ABD und ABC, dadurch man zugleich CBD erhält. (§. 37.) Hierbei werden die Schenkeln bd und bc angesezzet.

4) Wo sich die Seiten bd und ad des △ bda durchschneiden, nemlich in d; und wo sich

die Seiten ac und bc des △ acb durchkreuzen, welches in c geschiehet, durch diese Punkten c und d ziehe man die Linie cd, welche so viel im kleinen Maas als CD im grosen ausmachen wird.

Beweis.

Die Triangel abd und ABD haben zwei Winkeln dba und bad gemein. Wie sich daher verhält ab : AB = bd:BD. (§. 235.) Aber es verhält sich ab:AB wie das kleine Maas zum grosen. (§. 252. Bew. 1.) Also verhält sich auch bd: BD wie das kleine zum grosen. (§. 100.)

Die Winkeln cba und bac sind in beiden △ abc und ABC gemeinschaftlich. Also wie ba: BA = bc : BC. (§. 235.) ba verhält sich zu BA wie das kleine Maas zum grosen. (§. 252. Bew. 1.) Demnach wird sich auch verhalten bc:BC wie sich das kleine Maas zum grosen verhält. (§. 100.)

Nicht allein verhält sich bc : BC wie das kleine Maas zum grosen, (n. 2.) sondern auch bd : BD. (n. 1.) Also ist in den △ bcd und BCD, bc : BC = bd : BD. (§. 100.) Uiberdas ist in beiden der Winkel cbd gemeinschaftlich. Daher schlieset man, wie bc : BC = cd : CD. (§. 237.) Und cd wird so viel im veriüngten Maas als CD im grosen betragen. (n. 2. und §. 100.)

§. 256.

Aufg. Eine Höhe CE, zu deren Fuß E man kommen kan, zu messen?

Auflö-

Auflösung. Fig. XLII.

Man messe 1) aus dem nicht zu nahe an E gelegenen Stand A den verticalen Winkel CAD, so, daß er auf einer horizontalen Fläche stehe, (§. 187.) um bei D, nach angesezten Schenkeln ac und ad, einen rechten Winkel zu erhalten.

2) Messe man die Linie AE = aD und trage sie nach dem veriüngten Maas aus a in d.

3) Richte man in dem Punkt d eine senkrechte Linie auf, welche den Schenkel aC in c durchschneiden muß. Die Linie cd reicht uns veriüngt das Maas von CD. Hierzu addiren wir die Höhe des Instruments DE um die ganze Höhe CE zu erhalten.

Beweis.

In den △ cad und CAD ist der Winkel a gemeinschaftlich und bei d und D sind rechte. (§. 134.) Wie also ad : AD = dc : DC. (§. 235.) Da sich nun ad : AD verhält wie das veriüngte Maas zum grosen. (§. 252. Bew. 1.) So muß cd so viel im kleinen sein als CD im grosen Maas ist. (§. 100.)

§. 257.

Aufg. Wir sollen eine Höhe CE messen, an deren Fuß wir nicht können kommen?

Auflösung. Fig. XLII.

Man suche 1) zwei Stände A und B (n. 1. §. 256.) und sezze einen hierzu bereiteten Stab also in B, daß er nicht allein mit AD in einer geraden

raden Linie stehet, sondern auch die Höhe des Instruments in A hat.

2) Messe man den verticalen Winkel CAB dadurch man die Schenkeln a c und a b erhält.

3) Messe man die Standlinie AB und trage sie veriüngt aus a in b.

4) Nehme man das Instrument von A weg und stekke in gleicher Höhe ienen Stab dahin, das Instr. aber trage man in gleicher Höhe mit dem in B gewesenen Stab hierher in B, daß sowol b über B senkrecht stehe, als auch b a in B A liege und der Winkel ABC aufgenommen werden können.

5) Messe man noch den auf horizontaler Fläche stehenden verticalen Winkel CBD, und lasse aus dem Punkt c, wo sich die Schenkeln a C und b C durchschneiden einen Perpendikel c d auf den horizontalen Schenkel b D fallen. Dieser cd ist die Höhe CD im kleinen und liefert uns nebst DE, der Höhe des Instr. die ganze Höhe CE

Beweis.

Weil △ abc ∽ △ ABC (§. 235.) und a b sich zu AB verhält, wie das veriüngte Maas zum grosen; weil ferner der △ bcd ∽ BCD (§. 235.) so muß sich auch verhalten cd : CD wie das kleine Maas zum grosen.

§. 258.

Anm. Wenn DE der Höhe des Instruments in B gleich sein soll: so sieht man leichtlich, daß die Fläche,

darauf man misset, eine horizontale Ebene sein müsse. Ist sie schief: so hat man noch an unverrüktem Instrument in B den Winkel DbE aufzunehmen; und wenn man bis an den Fuß der Höhe hat visiren können, den Perpendikel cd bis auf den Schenkel bE zu verlängern. Kan man aber nicht, wie bei einem Berge, bis an den Fuß der Höhe visiren: so muß man aus dem Punkt E, der durch den Schenkel bE und den aus A zu messenden Winkel BAE bestimt wird, eine parallele Linie mit der horizontalen bD ziehen, und von c den Perpendikel auf dieselbe senken. Dieser macht die wahre Höhe aus.

§. 259.

Aufg. Wie werden wir eine geradlinichte Figur aus der Mitten in Grund legen, oder eine ihr ähnliche kleine entwerfen?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXVIII.

Wenn nicht schon alle Ekken der Figur genau bezeichnet sind; so stekke man 1) Stäbe in B, C, D, E, F.

2) Nach erwähltem Punkt a innerhalb der Figur, messe man alle Winkeln BaC, CaD, DaE, EaF, FaB mit Ansezzung der Schenkeln aB, aC, aD, aE, aF.

3) Werden alle Linien aB, aC, aD, aE, aF gemessen; und veriüngt aus a nach b, die Linie aB; aus a nach c, die Linie aC; aus a nach d, die Linie aD; aus a nach e, die Linie aE; aus a nach f, die Linie aF getragen.

4) Kan man nun durch Ziehung der Linien bc, cd, de, ef, fb die kleine Figur schliesen. Und so ist BCDEF in Grund gelegt. (§. 252. Bew. 1. 237. 240. 4.)

§. 260.

Aufg. Eine geradlinichte Figur aus dem Umfang in Grund zu legen?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXVI.

Man sezze 1) Stäben in B, C, D, E in A das Instrument und messe daselbst den Winkel EAB.

2) Messe man auch die Seite AE und AB und trage auf den angesezten Schenkeln AE veriüngt aus a in e, AB aus a in b.

3) Nehme man das Instr. aus A, lasse daselbst einen Stab zurück; sezze es aber wieder in B, daß b senkrecht auf B stehe und ab in AB liege.

4) Jezt messe man den Winkel ABC, die Seite BC und trage sie auf dem angesezten Schenkel aus b in c.

5) Nun stekt man wieder in B den herausgezogenen Stab, gehet mit dem Instr. nach C und sezzet das vorgeschriebene Geschäfte fort bis man um die ganze Figur gekommen: so wir ABCDE durch abcde in Grund gelegt sein. (§. 252. Bew. 1. 147. 240.)

§. 261.

Anm. Wenn DE veriüngt aus d gezogen wird, so muß sie die schon gezogene ae in e berühren und die Figur schliesen. Geschieht dieses nicht: so ist gefehlt worden. Damit man nun desto leichter erfahre, wo der Fehler begangen worden: so visire man schon aus A nach D und C; und ziehe diese Diagonalen aD und aC. Komt man in C und erblikket durch das an Ca angelegte Diopterlinial den Stab in A: so ist zwischen

A und

A und C kein Fehler gemacht worden. Wo nicht, so haben wir schon einen begangen, und wir können ihn nun noch bequemer verbessern, als wenn wir schon die ganze Arbeit verrichtet hätten. Eben diesen Dienst thut uns die andere Diagonale a D; deren man auch mehrere, wenn die Figur gros ist, ziehen kan.

§. 262.

Aufg. Eine geradlinichte Figur ABCDE aus zweien Orten A und B in Grund zu legen?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXVI.

Man bezeichne 1) alle Ekken der Figur mit Stäben und messe aus A die Winkeln BAE, BAD, BAC.

2) Werde die Standlinie AB gemessen und auf dem angesezten Schenkel veriüngt aus a in b getragen.

3) Nun lasse man in A einen Stab zurük und sezze das Instr. in B daß b über B senkrecht stehe und ba in BA liege.

4) Jezt misset man hier die Winkel ABC, ABD, ABE; und ziehet

5) In den Punkt c, wo sich die Schenkeln ac und bc durchschneiden, aus b die Linie bc; in den Punkt d, da sich ad und bd durchkreuzen, aus c die Linie cd; in e, wo sich ae und be durchschneiden, aus d die Linie de; aus a die Linie ae: so ist die Figur geschlossen und durch dieselbe ABCDE in Grund gelegt. (§. 235. 237. 4.)

§. 263.

§. 263.

Zus. Solten wir nicht auch eine Figur in Grund legen können, wenn wir alle Seiten und drei Diagonalen weniger als Seiten sind messen und veriüngt zu Papier tragen? (§. 230.) Wenn wir alle Seiten und drei Winkeln weniger als die Figur enthält aufnehmen? (§. 229.) Wenn wir endlich alle Winkeln weniger einen und alle Seiten weniger zwei messen, und wie gewöhnlich veriüngt zusammenfügen? (§. 230.)

§. 264.

Anm. Bedienen wir uns bei den vorhergehenden Aufgaben der Mesſcheibe: so werden die Winkeln nach §. 186. l. 2. aufgenommen. Die Figur zeichnet man im Brouillon, n. 2. Fig. XXXVI, schreibt nicht allein die Länge der Seiten auf, sondern bemerket sie auch noch auser den Ekken in der Mitten mit 1, 2, 3, u. s. f. wie auf der Scheibe. Die Abtragung der Figur mag bei der Erklärung beigefügt werden.

Mit der Bouſſole und dem besseren Astrolabio verfahren wir nach §. 253. Das Maas der Seiten kan man auf die angesezte Schenkeln, die Graden der Winkeln in die Neigung schreiben.

Vierter Abschnitt.

Von Ausmessung des Inhalts der Figuren.

§. 265.

Erkl. Die zum Flächenmaas erwählte Quadratruthe ist ein Quadrat, dessen Seiten eine Ruthe lang sind. Der Quadratschuh, ein Quadrat, dessen Seiten einen Schuh halten; und deren werden 100 in einer Quadrat-

ruthe

ruthe sein. (§. 130. 141. 248.) Ein Quadratzoll ist ein Quadrat, dessen Seiten einen Zoll im Maas haben; und deren sind in einem Quadratschuh 100 enthalten. (ebend.) So muß auch eine Quadratlinie, ein Quadrätgen sein, dessen Seiten eine Linie lang sind; 100 werden in einem Quadratzoll enthalten sein. (ebend.)

§. 266.

Aufg. Ein Parallelogram auszumessen?

Auflösung u. Beweis. Fig. VII.

Man nehme 1) eine Seite zur Grundlinie an und messe dieselbe nach §. 130. 184.

2) Lasse man auf diese von der gegenüberstehenden einen Perpendikel ab sinken und messe auch diesen.

3) Multiplicire man das Maas der Grundlinie mit dem Maas der Höhe ab: so ist das Produkt der Flächeninhalt des Parallelograms im Quadratmaas. (§. 248. 265.)

§. 267.

Zus. Werden wir nun nicht 1) das Maas des Inhalts eines □ finden, wenn wir die Seite desselben durch sich selbst multipliciren? (§. 141. 134. 179. 174.)

Z. B. Seite des □	- -	8′
		8
Flächeninhalt des □	=	64 □′

Und so müssen wir auch 2) den Inhalt des

Rectanguli acbd finden, wenn wir die Grundlinie cb mit der Höhe ac multipliciren. (ebendas.) Fig. V.

§. 268.

Zus. Wir entdekken den Inhalt des Rhombi sowol als des Rhomboidis, wenn wir die Grundlinie mit der Höhe multipliciren. (§. 174.)

§. 269.

Zus. Wir können also, wenn wir den Inhalt eines Parallelograms mit der Höhe dividiren, die Grundlinie finden; wenn wir den Inhalt mit der Grundlinie theilen, die Höhe entdekken. (§. 50.)

§. 270.

Aufg. Wie finden wir den Inhalt eines Triangels?

Auflösung u. Beweis. Fig. X.

Man messe 1) sowol die angenommene Grundlinie AC = 12′, als die auf sie gefälte Höhe Be = 9′

2) Multiplicire man beide mit einander und dividire das Produkt mit 2: so hat man den Inhalt des △ = 54 □′. (§. 249.)

§. 271.

Zus. Man darf auch nur die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multipliciren, um den Inhalt eines Triangels zu erhalten. (§. 7.)

§. 272.

Zus. Solten wir also nicht die Höhe eines △ finden, wenn wir den Inhalt mit der halben

Grund-

Grundlinie dividiren? Die Grundlinie, wenn wir den Inhalt mit der halben Höhe theilen? (§. 50.)

§. 273.

Aufg. Wie werden wir den Inhalt einer geradlinichten Figur erfahren?

Auflösung u. Beweis.

Man theile 1) die Figur durch Diagonalen in Triangeln.

2) Suche man den Inhalt eines ieden △ nach §.270 und

3) Addire man alle: so wird die Summe den Inhalt der ganzen Figur liefern. (§. 4. 219.)

§. 274.

Anm. So rechnen wir ein ganzes Feld aus, wenn es zuvor in Grund gelegt; oder die Grundlinien und Höhen aller Triangeln ausgemacht worden. Man kan hier zu seinem Vortheil mehr als eine Höhe auf eine Grundlinie zu senken suchen.

§. 275.

Aufg. Wie finden wir den Inhalt einer Cirkelfläche?

Auflösung.

Man darf nur die Peripherie mit dem halben Radio oder dem vierten Theil des Diameters (§. 150.) multipliciren. Das Produkt ist das Maas vom Flächeninhalt des Cirkels.

Beweis.

In einem △ wird in diesem Fall die Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt. (§. 271.)

Warum sollen wir nun nicht den Inhalt des Cirkels finden, wenn wir die Peripherie mit dem halben Radio multipliciren? (§. 227.)

§. 276.

Lehrs. Es verhält sich der Inhalt eines jeden Cirkels zum Quadrat seines Diameters beinahe wie 785 zu 1000.

Beweis.

Wir haben schon gehört, daß sich in iedem Cirkel verhalte der Diameter zur Peripherie, wie 100 zu 314. (§. 247.) Wir können uns aber eines ieden Cirkels Diameter, z. B. von 12' gar wol in 100 gleiche Theilen zergliedert gedenken. (§. 56.) Wird alsdenn nicht die Peripherie 314 solcher Theilen haben müssen? und wird nicht selbst der Inhalt des Cirkels 314 . 25 = 7850 von diesen Theilen enthalten? (§. 275.) Das Quadrat aber von ienem in 100 gleiche Theilen zergliederten Diameter wird stets 10000 sein. (§. 86.) Es muß sich also der Inhalt eines ieden Cirkels zum □ seines Diameters verhalten, wie 7850 zu 10000; oder dividirt mit 10, wie 785 zu 1000. (§. 96.)

§. 277.

Lehrs. Der Inhalt der Cirkelflächen verhält sich 1) wie die Quadraten ihrer Diametern 2) wie die □ ihrer Radien.

Beweis.

1) Wie 785 : 1000 so aller Cirkeln Inhalt

zum

zum □ ihrer Diametern. (§. 276.) daher verhält sich auch, der Inhalt des Cirkels A zum □ seines Diameters D, wie der Inhalt des Cirkels a zum □ seines Diameters d; (100.) ia der Inhalt eines Cirkels zum Inhalt des andern, wie das □ des Diameters von einem zum □ des Diameters vom andern. (§. 105.)

2) Kan nun iemand zweiflen, daß sich ein Cirkel zum andern verhalte, wie das □ auf dem Radio des einen zum □ auf dem Radio des andern? (§. 150. 96.)

§. 278.

Aufg. Wie finden wir die Peripherie eines Cirkels, dessen Diameter uns, z. B. = 12′ bekant ist?

Auflösung u. Beweis.

Man hat nur zu 100 und 314 und dem bekanten Diameter, 12′, die vierte geometrische proportionirliche Zahl 3768‴, zu suchen. (§. 108.) Diese ist das Längenmaas der Peripherie. (§. 247.)

§. 279.

Zus. Werden wir nicht aus gleicher Ursach den Diameter durch die gegebene Peripherie entdekken, wenn wir zu 314 und 100 und der gegebenen Periph. z. E. = 3768‴ die vierte proportionirliche Zahl, 1200‴, finden? (§. 247.)

§. 280.

Zus. So müssen wir auch den Inhalt des

Cirkels aus der Peripherie finden: wenn wir 1) aus der Peripherie den Diameter suchen (§. 279.) und 2) mit dem vierten Theil des Diameters die Peripherie multipliciren. (§. 275.)

§. 281.

Zus. Auf gleiche Weise finden wir den Inhalt eines Cirkels aus dem gegebenen Diameter: wenn wir 1) die Peripherie suchen; (§. 278.) und sie 2) mit dem vierten Theil des Diameters multipliciren.

§. 282.

Aufg. Wie finden wir den Diameter und die Peripherie aus dem gegebenen Inhalt des Cirkels?

Auflösung u. Beweis.

Man suche 1) zu 785 und 1000 und dem gegebenen Inhalt die vierte proportionirliche Zahl. (§. 108.)

2) Muß aus dieser die Quadratwurzel gezogen werden, welche selbst der Diameter ist. (§. 276.)

3) Kan man aus dem Diameter die Peripherie entdekken. (§. 278.)

§. 283.

Aufg. Wie finden wir den Inhalt des Ausschnittes aebca, wenn uns der Radius ac, 6′ und der Bogen bea, 5°, bekant ist?

Auflösung u. Beweis. Fig. XXIX.

Man entdekke 1) zu 100, 314 und dem doppelten

pelten Radio = 12' d. i. dem Diameter, die vierte proportionirte Zahl 3768''', welche die Peripherie ausmacht. (§. 278.)

2) Muß man zu 360°, der Peripherie 3768''' und dem gegebenen Bogen, 5°, die vierte proportionale Zahl $52\frac{1}{3}$''' finden, welche uns den Bogen im Längenmaas reichet.

3) Wird diese Länge des Bogens mit dem halben Radio = 300''' multiplicirt: so liefert das Produkt 15700 □''' den Inhalt des Ausschnittes aebca. (§. 228. 270.)

§. 284.

Zus. Misset man hier den △ cab und ziehet ihn vom Ausschnitt ab: so muß des Abschnitts aeba Inhalt heraus kommen. (§. 228.)

§. 285.

Aufg. Wie sollen wir den Diameter de und zugleich den Radium suchen, wenn man uns die Sehne ab = 12' und ihre Höhe gd = 2' bekant macht.

Auflösung u. Beweis. Fig. XXI.

Weil die halbe Sehne gb zum Stück des Diameters gd und ge die mitlere proportionirte Linie ist: (243.) so darf man nur

1) Zu dg der gegebenen Höhe der Sehne = 2', und zu gb = 6' die dritte proportionale Zahl 18' ausmachen, welche das Maas des Stüks ge vom Diametro liefert. (§. 243.)

2) Wird dg = 2′ zu ge = 18′ addirt, daß man den Diameter = 20′ erhält.

3) Macht dieser halb genommen den Radium aus. (§. 150.)

§. 286.

Aufg. Wir sollen auch den Inhalt des Abschnittes agbda, aus der gegebenen Sehne ab, 12′, und ihrer Höhe gd, 2′, finden.

Auflösung u. Beweis. Fig. XXI.

Wir entdekken 1) nach §. 285. den Radium cd = 10′ und beschreiben damit einen Cirkel, in welcher wir die Sehne ab zeichnen.

2) Messen wir die Graden des Bogens adb von der Sehne ab = 80° und rechnen den Inhalt des Ausschnittes acbda nach §. 283 aus = $697777\frac{7}{9}$ □″.

3) Suchen wir durch die Sehne ab = 12′ und das Stük des Radii gc = 8′, als die Differenz zwischen dem ganzen Radio cd und der Höhe der Sehne gd, den Inhalt des △ cab nach §. 270, = 480000 □‴.

4) Ziehen wir diesen von dem Inhalt des Ausschnittes acbda ab: so muß der Inhalt des Abschnittes agbda = $217777\frac{7}{9}$ □‴ übrig bleiben. (§. 228.)

§. 287.

Aufg. Wie theilen wir eine iede geradlinichte Figur, z. B. ein Feld in verlangte gleiche Theilen?

Auflö=

Auflösung u. Beweis. Fig. XLIII.

Den gefundenen Inhalt, 108 □°, theilen wir 1) in die bestimte Theilen, z. E. in drei; und wenn

2) Ein △, als bcd, kleiner als ein Theil ist, so ziehe man dessen Inhalt, 24, hier von dem Drittheil, 36, ab. Das übrige 12 dividire man mit der halben Grundlinie bd, 4. Der Quotient, 3, ist die Höhe des △ bfd, welcher mit bcd $\frac{1}{3}$ ausmacht. (§. 272.)

3) In der Entfernung dieser Höhe, 3, ziehen wir eine Parallele mit bd um den Punkt f zu finden, dahin bf gezogen wird. (§. 179. 137.)

4) Um nun auch das andere Drittheil durch zwei △ zu finden, nehmen wir ein Drittheil halb = 18, und dividiren diese Helfte mit halb bf = 6: so haben wir die Höhe, 3, des ersten △ zum andern Drittheil, deren Punkt h wieder wie n. 3. gefunden wird. So entdekken wir nun auch den andern △ hfg. Und dann wird der lezte Theil der Figur hgea übrig bleiben.

Fünfter Abschnitt.

Von den Körpern und ihrem Maas.

§. 288.

Erkl. Bilden wir uns ein, es wäre eine gerade Linie ea am Ende e befestigt und bewegte sich mit dem andern Ende a in der Peripherie eines

nes Cirkels a m f n a; oder eine andere a b befestigt in a, liefe um den Perimeter einer geradlinichten Figur b c f e b: so haben wir im ersten Fall unter dem durchlauffenen Raum den Begriff eines Kegels; Fig. XLIV. im andern einer Pyramide. Fig. XLVI.

§. 289.

Zus. Wird also nicht die Pyramide von so vielen Triangelflächen, als ihre Grundfläche Seiten hat, umgeben? und werden nicht alle im Kegel mit der Grundfläche parallele Durchschnitten Cirkelflächen sein?

§. 290.

Erkl. Stellen wir uns einen sich um seinen unverrükten Diameter e d herum bewegenden halben Cirkel e b d vor: so sehen wir eine Kugel entstehen. Fig. XI. Lassen wir eine Cirkelfläche, oder eine geradlinichte Figur f e d sich an einer geraden Linie unter einem und ebendemselben Winkel fortbewegen: so entsteht im ersten Fall ein Cylinder, im andern ein Prisma. Fig. XLVI. Komt dieses von einem □ also her, daß dessen Höhe der Seite des □ gleichet: so heist es ein Cubus, Würffel. Fig. XLV. Wird es von einem Rectangulo gezeugt: so nent man es ein Parallelepipedum.

§. 291.

Zus. Wird nicht hieraus folgen, daß im Cylinder und Prismate alle mit der Grundfläche parallele Durchschnitten gleich sind? (§. 4.) daß den Cubum 6 gleiche □ einschliesen? daß das Paralle-

rallelepipedum von 6. Rectangulis umgeben ist, davon die gegenüberstehende gleich sein müssen?

§. 292.

Erkl. Umgeben den Körper nicht allein lauter gleiche, sondern auch einerlei reguläre Flächen, also, daß er lauter gleiche Winkeln hat: so ist er ein regulärer; im gegentheil ein irregulärer Körper. Ist nicht der Cubus ein regulärer? (§. 290.) Diesem stehen noch vier andere zur Seiten; das Tetraedrum, das Octaedrum, das Icosaedrum, das Dodecaedrum.

§. 293.

Lehrs. Prismata und Cylinder von gleichen Höhen und Grundflächen müssen gleich sein.

Beweis.

Die gleiche Höhe erlaubet nur gleich viel gleiche parallele Durchschnitten. (§. 391.) Solte hieraus nicht eine völlige Gleichheit der ganzen Körpern folgen?

§. 294.

Erkl. Die zum körperlichen Maas bestimte Cubicruthe ist ein Würffel, der eine Ruthe land, breit und hoch ist. Der Cubicschuh, Cubiczoll, Cubiclinien, sind Cubi deren Höhe, Länge, Breite einen Schuh, einen Zoll, eine Linie ausmachen.

§. 295.

Aufg. Wie finden wir den Inhalt eines Würffels und seine gesamte Fläche?

Auflö-

Auflösung. Fig. XLV.

Man muß 1) die Seite ae mit sich selbst multipliciren um die Grundfläche ac zu erhalten. (§. 267. 291.)

2) Multiplicire man diese mit der Höhe, d. i. mit einer Seite. (§. 290.) Das Product ist der Inhalt des Würffels.

3) Multiplicire man die Grundfläche mit 6: so komt die ganze Fläche heraus. (§. 291.) Z. E.

Seite ae - - 8′		64 □′ Grdfl.
ec - - 8		6
Grundfläche - - 64 □′		384 □′ ganze Fl.
Höhe af - - 8		

Inhalt des Cubi = 512 Cub.′

Beweis.

Wenn wir das Stück abcd, dessen Seite ae sowol als ec in 4 gleiche Theilen zergliedert worden und dessen Höhe ab = ag, von dem Würffel abschneiden; und aus den Theilungspunkten parallele Durchschnitten machen: so erhalten wir 16 gleiche Würfelgen. Aber weil af = ae: so müssen 4 . 16. d. i. 64 dergleichen in unserm Cubo enthalten sein. Und eben diese Theilen finden sich auch in dem Produkt aus der Höhe af und Grundfläche ac.

§. 296.

Zus. Was werden wir nun eher hieraus als dieses schliesen, daß 1 Cubicruthe 1000 Cubicschuh

schuh enthalte? 1 Cubicschuh 1000 Cubiczoll? 1 Cubiczoll 1000 Cubiclinien?

§. 297.

Aufg. Wie finden wir den Inhalt eines Parallelepipedi und seine ganze Fläche?

Auflösung.

Das Produkt aus der Breite und Länge reicht 1) die Grundfläche. (§. 290. 267.)

1) Multiplicire man diese mit der Höhe: so hat man den Inhalt.

3) Addire man die nach §. 267. gesuchten drei einander nicht gegenüberstehende Flächen und multiplicire die Summe mit 2: so hat man die gesamte Fläche. (§. 291.)

Der Beweis kan eben so wie §. 295. geführet werden.

§. 298.

Lehrs. Ein iedes Parallelepipedum besteht aus zwei gleichen dreiekkichten Primatis, deren iedes so hoch als das Parallelepipedum ist, und die Helfte von dessen Grundfläche zur seinigen hat.

Beweis. Fig. V.

Wenn das Rectangulum abcd die Oberfläche eines Parallelepipedi wäre, (§. 291.) und die Diagonallinie ab zerschnitte das ganze Parallelepipedum: so müssen, weil $\triangle$ acb $=$ adb (§. 177.) zwei dreiekkichte gleiche Prismata herauskommen, (§. 293.) deren iedes gleiche Höhe mit

mit dem Parallelep. und die Helfte von dessen Grundfläche hat.

299.

Aufg. Wie bestimmen wir überhaupt den Inhalt eines Prismatis und seine ganze Fläche?

Auflösung und Beweis.

Man messe 1) die Grundfläche des Prismatis nach §. 266. 270. 273. aus.

2) Multiplicire man diese mit der Höhe. Das Produkt liefert den Inhalt. (§. 297. 298. 160. 219.)

3) Multiplicire man den ganzen Perimeter der Grundfläche mit der Höhe, und addire zu diesem Produkt die doppelte Grundfläche: so hat man die ganze Fläche.

§. 300.

Aufg. Den Inhalt und ganze Fläche eines Cylinders aus seinem Diameter und seiner Höhe zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man mache 1) den Inhalt der Grundfläche aus. (§. 278. 275.)

2) Multiplicire man diesen mit der Höhe: so hat man den körperlichen Inhalt. (§. 227. 299.)

3) Zur Entdekkung der ganzen Fläche multiplicirt man die Peripherie mit der Höhe und addiret dazu die doppelte Grundfläche.

§. 301.

§. 301.

Lehrs. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen müssen gleich sein.

Beweis. Fig. L.

Wir wollen uns zwei Pyramiden, P und p, von gleichen Höhen und Grundflächen unter acbe vorstellen. mno sei ein paralleler Durchschnitt durch beide: und deswegen die Höhe ac in P = ac in p. (§. 137.) Nach §. 236. und 100 verhält sich wie ab : an, so alle Seiten bc, be, ce in bce zu allen no, nm, mo in nom. Weil nun auch ab : an, wie die Höhe ad zur Höhe ac sowol in P als in p: (§. 236.) so muß in P sein bec : nmo = ad : ac; und auch bec : nmo = ad : ac in p. (§. 100. 148. 147.) Also bec : nmo in P = bec : nmo in p. Und bec in P : bec in p = nmo in P : nmo in p. (§. 105.) Aber es ist bec in P = bec in p, vermöge der Bedingung. Also ist auch der Durchschnitt nmo in P dem Durchschnitt nmo in p gleich. (§. 9.) Dies kan eben so von allen parallelen Durchschnitten, deren wegen gleicher Höhe, nur gleich viele in P und p möglich sind, erwiesen werden. Nun kan man alle Pyramiden in dreiekkichte sowol zergliedern (§. 219.) als verwandeln. (§ 272. 288.) Alle Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen werden daher gleich sein.

§. 302.

Lehrs. Eine Pyramide ist der dritte Theil

eines

eines Prismatis, das gleiche Grundfläche und Höhe mit derselben hat; und so auch der Kegel ein Drittheil vom Cylinder.

Beweis. Fig. XLVI.

Ist unser Prisma kein rechtwinklichtes dreiekkigtes, so verwandle man es darin. (§. 290. 272.) Nun schneide man den ersten Theil afed in afe, den zweiten abfe in abf, von dem dritten abfc ab: so empfangen wir drei gleiche Pyramiden (§. 177. 4. 301.) und eben so müssen wir auch vom Cylinder drei gleiche Kegeln erhalten. (§. 227. 288. 290.)

§. 203.

Aufg. Wie finden wir den Inhalt des Kegels und der Pyramide?

Auflösung und Beweis.

Man darf nur die gesuchte Grundfläche mit der Höhe multipliciren; und das Produkt mit 3 dividiren. (§. 299. 300. 302.)

§. 304.

Zus. Wir können hier auch die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multipliciren. (§. 7.) Und wird also nicht, wenn wir den Inhalt mit dem dritten Theil der Höhe dividiren, die Grundfläche wieder heraus kommen? (§. 50.)

§. 305.

Zus. Aus dem obigen (§. 299. 300. 203.) ziehen wir iezt noch die Folge: daß sich alle Prismata, Cylindern, Pyramiden und Kegeln bei

der

der Gleichheit der Grundflächen wie die Höhen; bei gleichen Höhen, wie die Grundflächen verhalten. (§. 97.) Und ins besondere werden sich die Cylindern von gleichen Höhen, wie die □ von ihren Diametern verhalten müssen. (§. 277.)

§. 306.

Aufg. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden?

Auflösung und Beweis.

Weil 1) ac (als ad — bo) : cb = ad : de (§. 136. 238.) so kan man die ganze Höhe de (§. 108.) und vermittelst der Grundfläche amfn den Inhalt des ergänzten Kegels finden. (§. 303.)

2) Kan man aus der Höhe des mangelnden Kegels eo (als ed — od) und dessen Grundfläche in o, den Inhalt erfahren, (§. 303.) welchen man von ienem Inhalt abzuziehen hat.

§. 307.

Lehrs. Eine Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der gleiche Grundfläche mit ihrem grösten Cirkel und gleiche Höhe mit ihrem Diameter hat.

Beweis. Fig. XLVII.

Es sei gn (= gc. §. 236. 150.) der Radius vom Durchschnitt des Kegels ACB, gf der Radius vom Durchschnitt der $\frac{1}{2}$ Kugel dme; cf (= gi. 150.) der Radius vom Durchschnitt des $\frac{1}{2}$ Cylinders ABed: weil hier alle parallele

Durchschnitten Cirkelflächen sind. (§. 289. 291.) Diese verhalten sich aber wie die □ ihrer Radiorum. (§. 277. n. 2.) Und □ auf cf -- □ auf gc = □ auf gf. (§. 203. 31.) Also muß die Durchschnittsfläche der Kugel übrig bleiben, wenn von der Durchschnittsfläche des Cylinders, der Durchschnitt des Kegels = $\frac{1}{3}$ des Cylinders (§. 302.) weggenommen wird. Vor die Kugel bleibt also $\frac{2}{3}$ des Cylinders übrig.

§. 308.

Lehrs. Der Cubus des Diameters einer Kugel verhält sich zum Inhalt der Kugel beinahe wie 300 zu 157; und die Kugeln verhalten sich wie die Cubi ihrer Diametern.

Beweis.

In iedem Cirkel ist der Diameter zur Peripherie wie 100 zu 314. (§. 247.) Also der Cubus des Diameters zum Inhalt der Kugel, wie 1000 000 (§. 87.) zu $523333\frac{1}{3}$; (§. 307.) multiplicirt mit 3, wie 3000 000 zu 1570 000 (§. 96.) und wieder dividirt mit 10 000, wie 300 zu 157. (§. 96.) Und werden nicht auch die Kugeln in dem Verhältnis stehen, das die Cubi ihrer Diametrorum haben? (§. 100.)

§. 309.

Zus. Durch diese Proportion, 300 : 157 wie der Cubus des gegebenen Diameters zum Inhalt der Kugel, wird es leicht den Inhalt einer Kugel aus dem Diameter zu bestimmen seyn. (§. 105.)

§. 310.

Lehrs. Eine Kugel wird einer Pyramide gleichen, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche und deren Höhe dem Radio der Kugel gleich ist.

Beweis.

Wenn wir uns die ganze Kugelfläche in unendlich kleine □ zertheilt gedenken; und uns einbilden, es bewegte sich eine im Centro befestigte Linie um diese kleine □, die von einer geraden Fläche nicht merklich mehr unterschieden sind: so sehen wir, wie eine Kugel aus unendlich vielen Pyramiden bestehe, und also einer gleich seie, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche und deren Höhe dem Radio der Kugel gleichet. (§. 301.)

§. 311.

Zus. Wir finden also die ganze Kugelfläche, wenn wir den Inhalt mit dem dritten Theile des Radii oder dem sechsten des Diameters dividiren. (§. 304.)

§. 312.

Lehrs. Die Kugelfläche verhält sich zum grösten Cirkel einer Kugel wie 4 zu 1.

Beweis.

Wie 100 : 314 so aller Cirkeln Diameter zur Peripherie. (§. 247.) Also die gröste Cirkelfläche der Kugel zu ihrem Inhalt wie 7850 (§. 275.) zu $523333\frac{1}{3}$. (§. 308.) Dieser Inhalt mit dem sechsten Theil des Diameters = 100 : 6 dividirt,

J 2 reicht

reicht die Kugelfläche = 31400. (§. 311.) Daher verhält sich die ganze Kugelfläche zum grösten Cirkel, wie 31400 zu 7850; dividirt mit 7850, wie 4 zu 1. (§. 96.)

§. 313.

Zus. Warum solte nun nicht die Kugelfläche herauskommen, wenn wir die gesuchte Peripherie (§. 278.) des grösten Cirkels mit dem ganzen gegebenen Diameter multipliciren? (§. 275.) Und warum solten wir nicht den Inhalt der Kugel erhalten, wenn wir die ganze Fläche mit dem sechsten Theil des Diameters multipliciren? (§. 310. 304.)

§. 314.

Aufg. Einen Visirstab zu machen?

Auflösung u. Beweis. Fig. XLVIII.

Man trage 1) den Diameter eines z. E. 4måsigen Cylindrischen Gefåses aus B in A und in 1; A 1 aber aus B in 2. so ist B 2 der Diam. eines gleich hohen Gefåses von 8 Maas. (§. 305. 203.)

2) Zeichne man A 2 auf B 3: so ist B 3 der Diam. eines gleich hohen 12 måsigen Gefåses. u. s. f.

3) Trage man B 1, B 2, u. s. f. nebst ihrem Maas auf einen Stab: so ist der Visirstab fertig, dessen Gebrauch man leicht einsehen wird.

Ende der Geometrie.

Der

Der Trigonometrie
Erster Abschnitt.
Von den Gründen derselben.

§. 315.

Erkl. Man beschreibe aus der Spizze eines Winkels o mit einem willkürlichen Radio durch seine Schenkeln einen Bogen, und lasse aus dem abgeschnittenen Punkt b des einen Schenkels ab einen Perpendikel be auf den andern Schenkel ac sinken: so ist diese senkrechte Linie be der Sinus des Winkels o und des Bogens bc, der das Maas von o ist. Fig. XLIX.

§. 316.

Zus. Ist nun nicht auch der Sinus des Bogens bc und des Winkels o, die halbe Sehne des Bogens bcd, der das doppelte Maas des Winkels o ist? (§. 211. 145.)

§. 317.

Zus. Alle mögliche Winkeln können in dem halben Cirkel nfc gezeichnet werden. (§. 131.) Müssen also nicht alle Sinus derselben einander parallel sein? (§. 315. 138.)

§. 318.

Anm. Man sieht es dem Sinui be leicht an, daß er desto kleiner werden müsse: ie mehr sich ab gegen ac neiget oder ie kleiner dessen Winkel o ist; desto gröser,

je gröser dieser Winkel wird. Und muß nicht Sin. be am grösten sein, wenn sich b selbst in f erhebet? Hier wird aber auch die senkrechte Linie in a sinken und selbst zum Radio werden.

§. 319.

Erkl. Ein solcher Sinus fa (§. 318.) ist der Sinus eines rechten Winkels und wird der Sinus totus genennet.

§. 320.

Zus. Weil nicht auf an sondern auf sie nach c verlängert ein Perpendikel aus b fallen kan: so sieht man, daß der stumpfe Winkel nab keinen andern Sinum als den Sinum be seines spizzigen Nebenwinkels haben können. Dieses folgt auch aus §. 218. und 316.)

§. 321.

Erkl. Der Winkel x ist das Complement des Winkels o zu 90°. Deswegen wird hb der Sinus des Complementwinkels oder der Cosinus von o genennet. Es wird also be der Sinus von o und Cosinus von x; bh der Sinus von x und Cosinus von o sein. ec heist der Sinus versus von o; hf von x. Fig. XLIX.

§. 322.

Erkl. Richten wir in c auf dem Radio und Schenkel des Winkels o einen Perpendikel auf bis in k, wo er den verlängerten Schenkel ab treffen muß: so haben wir den Tangentem des Winkels o und Bogens bc; und zugleich auch den Cotangentem von x und dessen Bogen.

Die

Die Linie ak ist der Secans von o und dem Bogen bc, der Cosecans von x und dessen Bogen.

§. 323.

Zus. Wer begreift nun nicht, daß Nebenwinkeln auch einerlei Tangentes und Secantes haben müssen? (§. 320.) und daß der Tangens eines rechten Winkels unendlich seie? (§. 138.)

§. 324.

Lehrs. Es haben 1) alle Sinus 2) Tangenten 3) Secanten von einerlei Winkeln und Bogen, zu ihren Radiis oder Sin. totis ein gleiches Verhältnis.

Beweis. Fig. XLIX.

Weil 1) Rad. ab: Sin. be = Rad. ak: Sin. kc, (§. 315. 138. 236.) so sieht man die Wahrheit des ersten.

2) Ist Rad. ac: Tang. ck = Rad. am: Tang. mg. (§. 322. 138. 236.)

3) Verhält sich Rad. ac: Sec. ak = Rad. am: Sec. ag. (ebendas.)

§. 325.

Anm. Daher ist es möglich dem Sinui toti eine bestimte Gröse zu geben und alle Sinus, Tangenten und Secanten darnach zu berechnen. Man hat für den Sinum totum 10 000 000 Theilen erwählet und ausgerechnet wie viel deren iedem Sinui, Tangenti, Secanti zukommen, und dadurch die Tabellen der Sinuum, der Tangenten und Secanten erhalten.

§. 326.

Lehrs. In iedem △ verhält sich eine Seite zum Sinui des ihr entgegenstehenden Winkels

kels, wie die andere zum Sinui des Winkels, der ihr entgegenstehet.

Beweis. Fig. L.

Es ist möglich die drei Winkeln eines △ in die Peripherie eines Cirkels zu bringen. (§. 212.) Hier muß ½ ab der Sinus von e sein. (§. 316. 214.) Also verhält sich die Seite ab zum Sinui des ihr entgegenstehenden Winkels e, wie 2 : 1. Und so verhalten sich alle übrige Seiten. (§. 316.) Es muß sich daher in iedem △ eine Seite zum Sinui des ihr entgegenstehenden Winkels verhalten, wie die andere zum Sinui des Winkels, der ihr entgegenstehet. (§. 100.)

§. 327.

Lehns. Die Summe, 14, von zweien verschiedenen Zahlen, 5, und 9, besteht aus der kleinen, 5, zweimal genommen und der Differenz.

Beweis.

Die Summe, 14, fasset die kleine Zahl, 5, schon für sich einmal in sich. (§. 28.) Und weil die grose, 9, aus den Einheiten der kleinen, 5, bestehet und denen, die ihr noch überdas zukommen, d. i. der Differenz, 4, (§. 35.) so ist klar, daß in der Summe die kleine zweimal enthalten seie nebst der Differenz beider Zahlen.

§. 328.

Zus. Was ist nun begreiflicher, als daß 1) die halbe Summe aus der kleinen einmal genommen

men und der halben Differenz bestehe? Daß 2) wenn man diese halbe Differenz von der halben Summe wegnimt, die kleine Zahl übrig bleibe? Daß 3) wenn man von der halben Summe die kleine Zahl wegthut, die halbe Differenz übrig bleibe? Daß 4) wenn wir zu der halben Summe noch die halbe Differenz hinzuthun, die grose Zahl entstehen müsse?

§. 329.

Lehrs. In iedem △ verhält sich die Summe von zweien Seiten ab und bc, zu ihrer Differenz: wie der Tangens der halben Summe der beiden ihnen gegenüberstehenden Winkeln a und c, zum Tangenten der halben Differenz dieser Winkeln.

Beweis. Fig. LI.

Wenn man bd und be der einen Seite des △ ab gleich macht und ae ziehet: so ist dc die Summe beider Seiten ab und bc; ec aber ihre Differenz. Der Winkel dae ist ein rechter, (§. 215.) desgleichen f, wenn die Linie cf mit ae parallel gezogen und da verlängert wird. (§. 168.) df ist also der Tangens von m † n; af von m. (§. 322.) Aber es ist 1) der Winkel n † m die halbe Summe der beiden Winkeln a und c. Dann a (oder o † x) und c (oder n) ist = o † y, (§. 169. 6.) und y = o. (§. 165.) Also ist y die halbe Summe. Aber es ist y = n † m. (168.) Also n † m die halbe Summe von a und c. 2) Wird auch m die halbe Differenz dieser Winkeln sein.

 (§. 328.

(§. 328. n. 1. und 3.) Muß sich nun nicht verhalten die Summe dc zur Differenz ec: wie Tangens df der halben Summe n + m, zum Tangenten af der halben Differenz m? (§. 236.)

§. 330.

Lehns. In iedem △ verhält sich die gröste Seite AB (wenn mit der kleinsten CB aus C ein Cirkel beschrieben wird) zu der Summe Af der übrigen Seiten AC und CB: wie die Differenz von diesen Ad, zu dem von der grösten Seite AB abgeschnittenen Stük Ae.

Beweis. Fig. LII.

Af ist die Summe von AC und CB. (§. 150.) Man ziehe de und fB: so ist o + eBf = 180° (§. 218.) Aber es ist auch o + n = 180° (§. 152.) Also n = eBf, (§ 6.) und x = y. (§. 172.) Daher verhält sich AB : Af = Ad: Ae. (§. 234.)

§. 331.

Zus. AB — Ae = eB. Zieht man nun die senkrechte Linie Cg: so ist eg = gB. (§. 211.)

§. 332.

Anm. Die grose Zahlen der Sinuum und Tangentium machen in Berechnung ihrer Verhältnissen. (§. 324. 326.) das multipliciren und dividiren überaus mühsam. Jene grose Männer (§. 121.) haben uns dieser Mühe durch die Logarithmen überhoben. Sie haben iedem Sinui, Tangenten, u. s. f. seinen Logarithmum bestimt. In diesen Tabellen suchen wir für den Sinum, u. s. f. eines Winkels den Logarithmum

mum auf, oder wir vertauschen mit diesem den Winkel. Doch finden wir hier die Winkeln nicht in Secunden, Tertien u. s. f.

§. 333.

Aufg. Wie erfahren wir also den Logarith. für den Sinum, u. s. f. eines in Secunden und Tertien gegebenen Winkels, z. E. 30°4′15″?

Auflösung u. Beweis.

Wir nehmen 1) für den Sinum, u s. f des Winkels den Log. aus den Tafeln nur in Graden und Minuten, hier von 30° 4′. 2) Ziehen wir diesen von dem nächst folgenden Log. ab; und suchen 3) zu 60″ oder 3600‴, zu der gefundenen logarithmischen Differenz, hier 2181, und zu der gegebenen Anzahl Secunden, 15, oder Tertien, 900, die vierte geom. proport. Zahl. 4) Addiren wir diese, $545\frac{1}{4}$, zum kleineren Log. (§. 126.)

§. 334.

Zus. So ist es auch nicht schwer für einen Log. der nicht völlig in den Tafeln enthalten, den **Winkel** auszumachen. Man darf nur zu der Differenz der beiden Log. zwischen welche der gegebene fält, zu der Diff. des gegebenen und des kleineren aufgesuchten, und zu 60″ oder 3600‴ die vierte geom. proport. Zahl entdekken, und diese, als Secunden oder Tertien, den Graden und Minuten, welche der kleinere aufgesuchte Log. bezeichnet, beisezzen. (§. 126. 105.)

§. 335.

Zus. Weil wir für das Längenmaas der Seiten eines Δ auch Log. annehmen: so finden wir für die Zahl desselben, die zwar die kleinere Tafeln, aber nicht 10 000 000 übersteiget, den Logarithmum: wenn wir 1) so viel Figuren an der Rechten abschneiden, daß wir für die zur Linken übrige den Log. aus den Tafeln nehmen können; wenn wir 2) zu 10 (wenn eine Figur abgeschnitten worden) zu 100 (wenn es zwei sind) u. s. f., zur Diff. des aufgesuchten Log. und des nächst gröseren, und zu den abgeschnittenen Figuren die vierte geom. prop. Zahl suchen; und 3) diese zu dem kleineren Log. addiren und seine Kenziffer um so viele Einer vermehren als Figuren abgeschnitten worden. (§. 126. 123.)

§. 336.

Zus. Sollen wir für einen Log. der zwar der Kenziffer aber nicht den Decimalbrüchen nach in den Tafeln enthalten, die gehörige Zahl finden: so suchen wir 1) den Log. unter seiner Kenziffer, z. E. 1, und nehmen die Zahl des ihm nächst kleineren, z. B. als Ruthen, an; wir schlagen ihn ferner unter der Kenziffer 2 auf und nehmen die noch auser iener allhier stehende Zahl zu Schuhen, u. s. f. Ist aber 2) die Kennziffer schon 3: so sucht man zur Diff. der Log., zwischen welche er fält, zu 10′, 100″, 1000‴ (wie man es nötig findet) und zur Diff. des gegebenen und kleineren aufgesuchten die vierte

geom.

geom. prop. Zahl. Diese entdekte Schuhen, Zollen, u. s. f. sezzen wir zum Maas des kleineren Log. (§. 126.)

Solte der Log. gröser als die in den Tabellen befindliche sein: so ziehen wir von ihm den Log. von 10 oder 100, u. s. f. ab; suchen für das übrigbleibende die gehörige Zahl (n. 1. 2.) und multipliciren diese wieder mit dem gehabten Divisore 10, 100, u. s. f. (§. 118. 49.)

§. 337.

Zus. Für einen negativen Log. finden wir den Bruch: (§. 125.) wenn wir 1) zu diesem Log. einen andern von einem erwählten Decimalnenner, z. E. von 10000 addiren, welches durch die Subtraction geschiehet; 2) Die Zahl dieser logarithmischen Summe suchen und sie zum Zähler des angenommenen Nenners nehmen. (§. 118. 80.)

Zweiter Abschnitt.

Von Berechnung der Triangeln.

§. 338.

Aufg. Wie entdekken wir in einem rechtwinklichten △, darin uns die Catheti ac und ab bekant sind, die Hypotenus cb und die spizzige Winkeln b und c?

Auflösung u. Beweis. Fig. LIII.

Man erwähle 1) zur Entdekkung des Winkels

kels b folgende Proportion, *ab : ac = rad ab : tang. b.* (§. 324.)

Wie der Cathetus ab = 22°
Zum Catheto ac = 34°
So Sinus Totus oder Rad. ab
Zum Tang. ac des Winkels b.

Log. ac	-- --	1.5314789
Log. Sin. tot.	--	10.0000000
	--	11.5314789
Log. ab	-- --	1.3424227

Log. Tang. b = 10.1890562. Dieser Log. bestimt dem Winkel b, 57°5′41″6‴. (§. 334.)

2) Können wir nach §. 171. den Winkel c finden.

3) Die Hypoth. auszumachen erwählen wir diese Analogie, *Sin. b : ac = sin. totus : hypot. cb.* (§. 326.)

Log. ac	-- --	1.5314789
Log. Sin. tot.	--	10.0000000
		11.5314789
Log. Sin. b	--	9.9240569

Log. Hypot. cb = 1.6074220. Dieser Log. bezeichnet für die Hypot. cb gar wenige Linien mehr als 40°4′9″. (§. 336.)

§. 339.

Zus. Aus der gegebenen Hypot. cb und Cath.

Cath. ab können wir 1) den Winkel c durch diese Proportion ausmachen, *Hypot. cb : sin. toti* = *cath. ab : sin. c.* (§. 326.) 2) Den Winkel b nach §. 171. 3) Den Cath. ac also, *Sin totus : hyp. cb* = *sin. b : cath. ac.* (§. 326.)

Empfangen wir die Hypot. cb nebst einem spizzigen Winkel c, so suchen wir 1) den Winkel b nach §. 171. 2) Den Cath. ac auf diese Art, *Sin. totus : hyp. cb* = *sin. b : cath. ac.* (§. 326.) 3) Den Cath. ab also, *Sin. totus : cb* = *sin. c : ab*, oder *Radius : ac* = *tang. c : ab.* (§. 324.)

Wissen wir einen Cathetum ab und spizzigen Winkel c: so können wir 1) den Winkel b nach §. 171. suchen. 2) Den Cath. ac also, *Radius : ab* = *tang. b : ac*; (§. 324.) 3) Die Hypot. bc durch die Analogie, *Sin. b. : ac* = *sin. totus : cb.* (§. 326.)

§. 340.

Aufg. Wie sollen wir in einem schiefwinklichten △ aus einer gegebenen Seite *MO* und zweien Winkeln, die übrige Stükken finden?

Auflösung u. Beweis. Fig. IX.

Ist der Winkel N nicht gegeben, so suche man ihn nach §. 171. und erwähle nun 1) zur Entdekkung der Seite MN diese Proportion nach §. 326.

Sin. N : MO = *sin. O : MN.*

2) Fin-

2) Finden wir die Seite NO auf diesem Wege,

$$Sin.\,N : MO = sin.\,M : NO.$$

§. 341.

Zus. Wissen wir hier in dem △ MNO den Winkel M, die anliegende Seite MN nebst der nicht kleineren gegenüberstehenden NO: so finden wir 1 den Winkel O durch diese Analogie, (§. 326.)

$$NO : sin.\,M = MN : sin.\,O.$$

2) Den Winkel N nach §. 171.

3) Die Seite MO auf diese Art, (§. 326.)

$$Sin\,O : MN = sin.\,N : MO.$$

§. 342.

Anm. Die Summe der Winkeln im Triangel sagt uns hier, daß wir für den Log. des Sinus vom Winkel M nicht den spizzigen, sondern seinen stumpfen Nebenwinkel annehmen müssen. (§ 169.) Denn beide haben einerlei Logarithmen. (§. 320. 323.)

§. 343.

Aufg. Wie finden wir aus zweien Seiten ab und bc des △ abc und dem eingeschlossenen Winkel b die übrige Stükken.

Auflösung u. Beweis. Fig. LI.

I) Ist der △ gleichschenklicht wie abe, so erfahren wir die Winkeln nach §. 165. 171. und die Seite ae also, (§. 326.)

$$Sin.\,e : ab = sin.\,b : ae.$$

II) Ist der △ ungleichseitig, so suchen wir

1) die

1) die halbe Differenz der Winkeln a und c auf diese Art, (§. 329.)

$$ab + bc : bc - ab = tang. \tfrac{1}{2}\, a + c : tang. \tfrac{1}{2}\, a - c.$$

2) Den gröseren Winkel a, wenn wir zu der halben Summe beider Winkeln a und c, welche uns der §. 171. bekant macht, die gesuchte halbe Differenz derselben, $\frac{1}{2}$ a — c, addiren. (§. 328. n. 4.)

3) Den kleineren Winkel c, wenn wir von der halben Summe diese gefundene halbe Differenz wegnehmen. (§. 328. n. 2.)

4) Die Seite a c also, (§. 326.)

$$Sin.\ c : ab = sin.\ b : ac.$$

§. 344.

Aufg. Wie werden wir aus den drei Seiten eines △ die Winkeln finden?

Auflösung u. Beweis. Fig. LII.

I) In einem ungleichseitigen △ suche man 1) das Stük der grösten Seite, die zur Grundlinie erwählt wird, Ae also, (§. 330.)

$$AB : AC + CB = AC - CB : Ae.$$

hierdurch erfahren wir (1) gB nach gefältem Perpendikel Cg; wenn wir die entdekte Ae von AB abziehen und das übriggebliebene halb nehmen; (§. 331.) auch (2) die Linie Ag, wenn wir zu der gefundenen Ae, gB = eg addiren.

2) Erfahren wir den Winkel B oder m auf

diesem Wege, da wir zuvor den Winkel 2 im △ CgB also entdekken, (§. 339. n. 1.)

Hyp. CB : sin. toti = cath. gB : sin. 2.

und nun diesen erfundenen Winkel 2 von 90° abziehen. (§. 171.)

3) Stehet uns zur Erfindung des Winkels A ein gleicher Weg offen. Aber wir können einen kürzern, nemlich diesen wählen, (§. 341.)

AC : sin. B = CB : sin. A.

4) Bestimt der §. 171. den Winkel C.

II) Ist der △ gleichschenklicht, so suchen wir nur den von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel und erfahren die andern an der Grundlinie nach §. 165. 171. Und in einem gleichseitigen △ sagt uns schon die Geometrie alle Winkeln. (§. 165. 172.)

345.

Aufg. Wie sollen wir die Höhe Be eines △ ABC aus seiner Grundlinie AC und zweien Winkeln trigonometrisch bestimmen?

Auflösung u. Beweis. Fig. X.

Wir suchen 1) die Seite BC also, (§. 326. 171.)

Sin. B : AC = sin. A : BC.

2) Können wir die Höhe Be also berechnen, (§. 339. n. 2.)

Sin. totus : hyp. BC = sin. C : Be.

§. 346.

Zus. Fält die Höhe auser die Grundlinie wie

wie beim △ MNO Fig. IX: so suchen wir 1) die Seite MN nach §. 345. n. 1. und 2) Durch MN und den Nebenwinkel von M (§. 152.) die Höhe nach §. 345. n. 2.

§. 347.

Aufg. Wie bestimmen wir das Verhältnis des Diameters zur Peripherie, um über das §. 247. angenommene Rechenschaft zu geben?

Auflösung u. Beweis. Fig. XLIX.

Einem ieden Radio hat man 10 000 000 Theilen gegeben. (§. 325.) Hiervon erhält der Sinus be und Tangens ck von einer Minute beinahe 29.09. Mit gröserem Recht können wir diese 29.09 Theilen dem Bogen bc, der zwischen iene beiden fället, zueignen. Wenn wir nun diese 29.09 mit 21600, der Summe aller Minuten in der Peripherie, (§. 144.) multipliciren: so haben wir zwischen dem Produkt 62834400 und dem doppelten Radio 20 000 000 ein Verhältnis der Peripherie zum Diameter, welches, wenn man beide Zahlen mit 200 000 dividirt, beinahe sein muß, wie 314 zu 100. (§. 96.)

Dritter Abschnitt.

Von Anwendung trigonometrischer Aufgaben.

§. 348.

Aufg. Wie finden wir die Höhe CE, zu

deren Fuß wir aus A kommen können, trigonometrisch?

Auflösung u. Beweis. Fig. XLII.

Wenn der, auf horizontaler Fläche stehende, Winkel A und die Seite AD gemessen worden: (§. 257. n. 1.) so finden wir den Winkel C nach §. 171. und, nebst der Höhe des Instruments DE, die ganze Höhe also, (§. 339. n. 3.)

Radius : AD = tang. A : DC.

§. 349.

Aufg. Eine Höhe zu messen, zu welcher wir zwar nicht kommen, aber doch bis an den Fuß derselben visiren können?

Auflösung u. Beweis. Fig. XLII.

Ist aus den zweien Ständen A und B (§. 257. n. 1.) der Winkel BAC z. E. = 28° 12′, ABC = 136° 2′, DBC = 49° 58′ nebst der Linie AB = 47° gemessen worden, daß also ACB = 15° 46′: (§. 171.) so suchen wir 1) die Seite BC durch diese Analogie, (§. 340.)

Sin. ACB : AB = sin. BAC : BC.

Log. AB -- -- 1.6720979
Log. Sin. BAC -- 9.6744485

11.3465464
Log. Sin. ACB -- 9.4341223

Log. BC = 1.9124241

2) Die

2) Die Höhe CD auf diesem Weg, (§. 339. n. 2)

Sin. totus : *BC* = *sin. DBC* : *CD.*

Log. BC --- -- 1.9124241
Log. Sin. DBC -- 9.8840418

11.7964659
Log. Sin. tot. -- 10.0000000

Log. CD = 1.7964659. Hier haben wir 62° 5′ 8″, (§. 336.) welche nebst DE, der Höhe des Instr. die ganze Höhe CE ausmachen.

§. 350.

Anm. Messen wir nicht auf einer horizontalen Ebene, daß DE, der Höhe des Instr. nicht gleichen kan: so wird DE, nach gemessenem Winkel DBE und gefundenem Cath. BD, (§. 339. n. 2.) durch den §. 339. n. 3. ausgemacht und zu CD addiret.

§. 351.

Aufg. Wie finden wir die Höhe, zu welcher wir weder kommen, noch an den Fuß derselben visiren können?

Auflösung u. Beweis. Fig. XLII.

Man messe 1) aus A die Winkeln BAC und BAE nebst der Standlinie AB, aus B die Winkeln ABC, CBE, daß man auch EBA erhält, (§. 146.) und nun noch DBE mit horizontalem Schenkel BD.

2) Suche man BC aus den Winkeln ACB, (den man nach §. 171. erfährt) BAC und der

Linie AB; BE aus ABE, BAE und AB nach §. 340.

3) Entdekke man die scheinbare Höhe, welche CE vorstellen mag, aus BC, BE und CBE nach §. 343. Endlich

4) Ziehe man den gemessenen Winkel DBE (n. 1.) nebst dem gefundenen BEC (§. 343.) von 180° ab, um den Winkel bei E, welcher der wahren Höhe gegenüber stehet, zu erhalten; (§. 258. 168. 151.) und aus demselben nebst der Hypot. CE diese Höhe nach §. 339. n. 2. zu entdekken.

§. 352.

Aufg. Wie erfahren wir die Entfernung zweier Orten, zu deren keinem man kommen kan?

Auflösung u. Beweis. Fig. LIV.

Man messe 1) aus den Ständen D, C, E, (§. 254. n. 1.) die Winkeln u, o, n, (dadurch man auch m erhält, §. 151.) und x nebst den Linien DC und CE. 2) Suche man AC und BC nach §. 340. die Entfernung AB nach §. 343.

Oder besser: Fig. XLI.

Man messe aus A den Winkel BAC und BAD nebst AB, aus B die Winkeln ABD, ABC; dabei man sowol DBC (§. 31.) als ADB und ACB erfährt: (§. 171.) so findt man 1) BD auf diese Art, (§. 340.)

$$Sin.\ BDA : AB = sin.\ BAD : BD.$$

2) BC

2) BC auf diesem Weg, (§. 340.)

$Sin. BCA : AB = sin. BAC : BC.$

3) Den Winkel BCD, wenn wir die Diff. der beiden Winkeln BCD und CDB also suchen, (§. 343.)

$BD + BC : BD - BC = ta. \frac{1}{2} C + D : ta. \frac{1}{2} C - D$

und diese halbe Diff. zu der halben Summe der Winkeln C und D addiren. (§. 328. n. 4)

4) Die Entfernung CD also nach §. 340.

$Sin. BCD : BD = sin. CBD : CD.$

§. 353.

Aufg. Die Entfernung zweier Orten B und C, zu deren einem C man nur aus A kommen kan, zu messen?

Auflösung u. Beweis. Fig. XL.

Wenn die Winkeln A und C nebst der Standlinie AC gemessen worden: (§. 254. n. 1.) so erfahren wir 1) B nach §. 171. und

2) die Entfernung BC nach §. 340. also,

$Sin. B : AC = sin. A : BC$

§. 354.

Aufg. Endlich ist es leicht die Entfernung zweier Orten, zu deren iedem man aus A kommen kan, zu erfahren.

Auflösung u. Beweis. Fig. XXXIX.

Man misset nur den Winkel A, die Linien AB und AC; und suchet

1) Den gröseren Winkel B auf diesem Weg, da man zuvor die halbe Differenz der beiden Winkeln B und C durch folgende Analogie nach §. 343. endekket,

$$AC \dagger AB : AC - AB = ta. \tfrac{1}{2} B \dagger C : ta. \tfrac{1}{2} B - C$$

und darauf diese gefundene halbe Differenz zu der aus §. 171 bekanten halben Summe der Winkeln B und C addiret. Und nun kan man

2) die Entfernung B C gar leicht nach §. 340 durch diese Proportion ausmachen,

$$Sin. B : A C = sin. A : B C.$$

Ende der Trigonometrie.

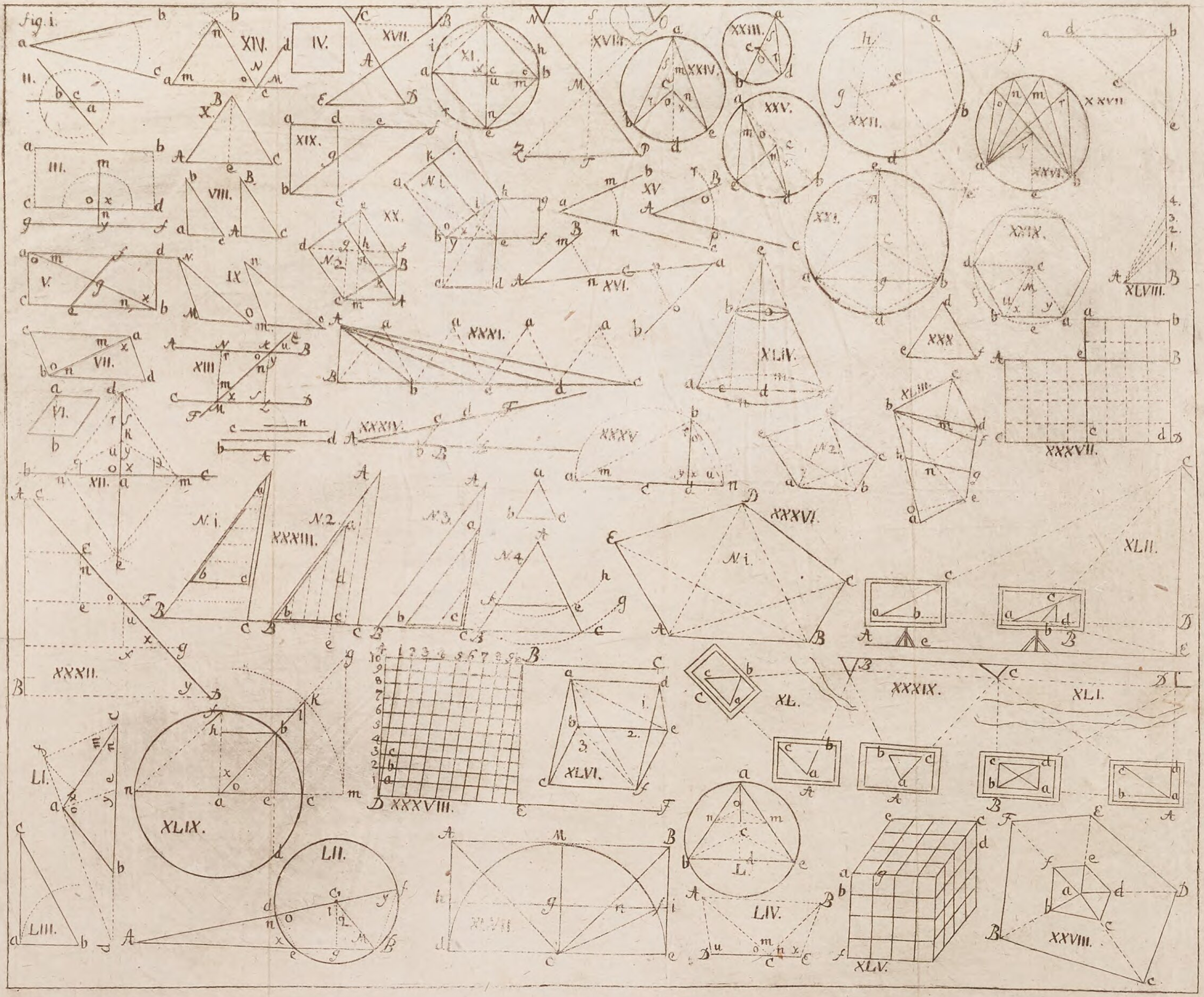
fig. I.
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.
VIII.
IX.
X.
XI.
XII.
XIII.
XIV.
XV
XVI.
XVII.
XVIII.
XIX.
XX.
XXI.
XXII.
XXIII.
XXIV.
XXV.
XXVI.
XXVII
XXVIII.
XXIX.
XXX
XXXI.
XXXII.
XXXIII.
XXXIV.
XXXV
XXXVI.
XXXVII.
XXXVIII.
XXXIX.
XL.
XLI.
XLII.
XLIII.
XLIV.
XLV.
XLVI.
XLVII
XLVIII.
XLIX.
L.
LI.
LII.
LIII.
LIV.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Krebs, Ludwig Alexander

Entwurf einer Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie

Giesen 1768

Bamberg, Staatsbibliothek -- Bip.Ma.o.5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11434175-6
VD18 10855025-003